

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP HCM
---oo0oo---**

PHAN THỊ ĐĂNG THU

PHÂN TÍCH TÍNH ỔN ĐỊNH KẾT CẤU DẦM BOM HƠI VẬT LIỆU COMPOSITE

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

**CHUYÊN NGÀNH: KỸ THUẬT CƠ KHÍ
Mã số: 9520103**

Thành Phố Hồ Chí Minh, tháng 8 năm 2021

TÓM TẮT

Luận án này trình bày việc xây dựng một mô hình số thiết lập chương trình thực nghiệm để khảo sát sự ổn định dầm bơm hơi được làm từ vật liệu composite.

Trong phần phân tích số, phương pháp đẳng hình học (Isogeometric Analysis (IGA)) được sử dụng để phân tích hiện tượng mất ổn định của dầm bơm hơi chịu lực nén dọc trục và dự đoán tải trọng mà tại đó sự phá hoại đầu tiên xảy ra. Lý thuyết dầm Timoshenko được sử dụng để xây dựng mô hình dầm làm bằng vật liệu bất đẳng hướng. Yếu tố phi tuyến tính hình học được xem xét bằng cách sử dụng khái niệm năng lượng, từ đó giải thích cho sự thay đổi của lực màng và năng lượng biến dạng khi dầm chịu uốn. Bằng cách áp dụng lý thuyết Lagrange và định luật công ảo, các phương trình cân bằng phi tuyến đã được rút xây dựng. Các phương trình này sau đó được rời rạc bằng cách sử dụng các hàm nội suy NURBS kế thừa từ phương pháp IGA để xây dựng các phương trình phi tuyến. Thuật toán Newton-Raphson sau đó được sử dụng để tìm lời giải cho các phương trình phi tuyến trên. Các kết quả số thu được từ quá trình phân tích được so sánh với kết quả thí nghiệm và cho thấy một sự tương đồng giữa kết quả thu được từ IGA và kết quả thực nghiệm. Mô hình số sau đó được sử dụng để khảo sát sự ảnh hưởng của các thông số vật liệu và hình học đối với khả năng chịu lực của dầm hơi chịu lực nén đúng tâm.

Trong phần thực nghiệm, các tính chất cơ học của vật liệu vải dệt composite được sử dụng để chế tạo dầm bơm hơi được xác định thông qua các thí nghiệm kéo dọc trục và hai trục. Các thí nghiệm xác định khả năng chịu lực của dầm hơi được thực hiện dưới áp lực được bơm khác nhau, từ đó phân tích sự ảnh hưởng của các đặc trưng vật liệu và áp lực bơm đến ứng xử ổn định của dầm hơi chịu nén đúng tâm. Các đường thực nghiệm thể hiện quan hệ lực nén và biến dạng được ghi nhận và minh họa, ngoài sự phá hoại (sự xuất hiện của các nếp nhăn) khi dầm hơi khi bắt đầu chịu lực đến lúc dầm bị phá hoại cũng được ghi nhận. Từ đó, khả năng chịu lực của dầm hơi qua các giai đoạn làm việc được ghi nhận.

CHƯƠNG 1: GIỚI THIỆU

1.1 Lời mở đầu

Các kết cấu dạng hơi hiện đang được sử dụng phổ biến trong các dự án công nghiệp và dân dụng, chẳng hạn như nhà phao trong khu vui chơi trẻ em, công chào, hình ảnh động vật, v.v... Tại Việt Nam, việc sử dụng các kết cấu bơm hơi là một lĩnh vực tương đối mới. Nói chung, việc thiết kế và phân tích các kết cấu bơm hơi cho các dự án lớn đã và đang phải đối mặt với những thách thức khó khăn. Điều này là do thực tế là ứng xử của kết cấu bơm hơi phụ thuộc vào áp suất bơm và vật liệu bên ngoài của kết cấu. Ngoài ra, sự thiếu hụt trong các nghiên cứu thực nghiệm về kết cấu bơm hơi cũng hạn chế việc áp dụng kết cấu này vào thực tế. Một số nhà nghiên cứu đã nghiên cứu các ứng dụng của kết cấu bơm hơi cho mục đích thực tế dựa trên các mô hình giải tích và phương pháp số. Tuy nhiên, việc sử dụng phương pháp giải tích thông thường hoặc phương pháp phân tử hữu hạn truyền thống vẫn có những giới hạn riêng.

1.2 Động lực của nghiên cứu

Việc sử dụng vật liệu vải dệt composite đã trở nên phổ biến hơn trong thời gian gần đây, chính vì vậy nhu cầu phân tích và thiết kế các kết cấu bơm hơi trở nên quan trọng hơn bao giờ hết. Chính vì vậy, nghiên cứu này được thực hiện để tìm hiểu sự làm việc của kết cấu của dầm hơi chế tạo bằng vải dệt composite dưới tác dụng lực nén đúng tâm, trong đó cả phương pháp mô hình số và thực nghiệm đều được tiến hành. Bên cạnh đó, việc áp dụng phương pháp IGA để phân tích ứng xử ổn định của dầm hơi chưa từng được nghiên cứu cụ thể trước đây, do đó việc đề xuất một cách tiếp cận mới dựa trên phương pháp IGA được tiến hành.

1.3 Mục tiêu và phạm vi nghiên cứu

Mục tiêu chính của nghiên cứu này là phân tích sự làm việc của dầm hơi làm bằng vải dệt composite bằng phương pháp mô phỏng số và thực nghiệm, qua đó tìm giá trị lực tới hạn và cơ chế phá hoại của kết cấu. Các mục tiêu cụ thể của nghiên cứu này có thể được tóm tắt như sau:

- 1) Phát triển một chương trình thực nghiệm để phân tích các hiện tượng mất ổn định của dầm hơi khi chịu tải nén đúng tâm.
- 2) Áp dụng phương pháp "Đẳng tham số - IGA" để phát triển một chương trình số nhằm phân tích hiện tượng mất ổn định của dầm hơi, qua đó xác định tải trọng tới hạn của dầm hơi với các điều kiện áp suất, vật liệu khác nhau.
- 3) So sánh các kết quả thực nghiệm và những kết quả thu được từ cách tiếp cận số để xác thực tính chính xác của chương trình được phát triển.

1.4 Phương pháp nghiên cứu

Để đạt được các mục tiêu nghiên cứu nêu trên, luận án này đã sử dụng một số phương pháp cụ thể như sau:

- Nghiên cứu, tìm hiểu các công trình nghiên cứu trước đây ở trong nước cũng như trên thế giới về các chủ đề của vật liệu vải dệt composite và kết cấu bơm hơi.
- Tham khảo, nghiên cứu và tổng hợp các mô hình và phương pháp tính toán của kết cấu bơm hơi làm bằng vải dệt composite, từ đó chọn một mô hình phù hợp để phát triển mô hình số dựa trên phương pháp IGA.
- Xây dựng chương trình thực nghiệm và phát triển mô hình số dựa trên nền tảng kiến thức cơ học.

1.5 Bố cục của luận án

Nội dung của luận án này được trình bày trong 6 chương như sau:

- *Chương 1* giới thiệu các thông tin cơ bản của luận án.
- *Chương 2* giới thiệu các nghiên cứu gần đây về kết cấu bơm hơi dựa trên phương pháp thực nghiệm và phương pháp mô phỏng số.
- *Chương 3* trình bày các đặc trưng cơ bản của IGA và phát triển các phương trình cơ bản cho bài toán ổn định của dầm hơi.
- *Chương 4* trình bày quá trình xây dựng mô hình số dựa trên phương pháp IGA.

- *Chương 5* trình bày quá trình xây dựng mô hình thực nghiệm, bao gồm việc lựa chọn vật liệu, kế hoạch tạo mẫu, quá trình thí nghiệm. Các kết quả thí nghiệm cũng được trình bày trong chương này.

- *Chương 6* tổng hợp những ý chính trong luận án cũng như tóm tắt những đóng góp chính và kết quả chính trong nghiên cứu này. Các kết luận và phát hiện quan trọng cũng được đề cập trong chương này.

CHƯƠNG 2: TỔNG QUAN

2.1. Phương pháp giải tích

Các nghiên cứu về ứng xử cơ bản của kết cấu bơm hơi đã được thực hiện rộng rãi bởi các nhà nghiên cứu khác nhau bằng cách sử dụng phương pháp giải tích. Một số tác giả áp dụng lý thuyết dầm Euler Bernoulli để mô hình hóa dầm hơi, các nghiên cứu tiêu biểu có thể kể đến như Comer, R. L., & Levy, S. cho dầm hơi làm bằng vật liệu đẳng hướng. Sau đó, nghiên cứu của Comer và Levy đã được Webber, J.P.H. mở rộng để dự đoán tải trọng phá hoại của các dầm hơi dạng công xôn. Ngoài ra, Main et al. cũng đã thực hiện các nghiên cứu cho một dầm hơi dạng xôn xôn đẳng hướng. Sau đó, Suhey et al. xem xét ứng xử của một ống điều áp dưới tác dụng của tải phân phối đều. Bằng cách áp dụng lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, vật liệu của dầm được cho là đẳng hướng và kết quả chuyển vị của dầm thu được từ phương pháp giải tích. Lý thuyết dầm Timoshenko được một số tác giả khác sử dụng và cho rằng đó là lý thuyết hữu hiệu để áp dụng cho bài toán khi thông số áp suất không xuất hiện trong lời giải như được đề cập trong các bài toán sử dụng lý thuyết Euler Bernoulli. Một chuỗi các phương trình phi tuyến được xây dựng bởi Fichter để phân tích bài toán uốn và xoắn của các dầm hơi hình trụ. Các phương trình này được thiết lập dựa trên ba giả định quan trọng sau: mặt cắt ngang của dầm hơi không thay đổi dưới tác dụng của tải trọng; thứ hai, chuyển vị và góc xoay mặt cắt ngang nhỏ; và biến dạng theo chu vi là không đáng kể và có thể bỏ qua. Lý thuyết Timoshenko và phương pháp cực tiểu năng lượng được sử dụng.

Sau đó, Topping, A.D. và Douglas, WJ đã phân tích độ cứng kết cấu của một dầm bơm hơi công xôn hình trụ bị ảnh hưởng bởi biến dạng lớn. Lý thuyết đàn hồi hữu hạn và lý thuyết về biến dạng nhỏ đã được sử dụng để có được kết quả phân tích rõ ràng. Các phân tích của họ cũng giải thích cho những thay đổi của hình học và vật liệu xảy ra trong quá trình bơm hơi. Wielgosz và Thomas phát triển các nghiệm giải tích cho bài toán các tấm hoặc ống bơm hơi dựa trên lý thuyết Timoshenko, các phương trình cân bằng ở trạng thái biến dạng của dầm hơi được thiết lập để tính đến độ cứng hình học và hiệu ứng lực do áp suất bên trong gây ra. Họ đã chỉ ra rằng khả năng chịu lực tới hạn tỷ lệ thuận với áp suất bơm và chuyển vị tỷ lệ nghịch với tính chất vật liệu chế tạo áp suất bơm.

Wielgosz và Thomas đã trình bày kết quả thực nghiệm và tính toán về chuyển vị của các ống hơi chịu moment uốn. Các thí nghiệm đã chỉ ra rằng ứng xử ống trông giống như của các tấm bơm hơi. Phương trình cân bằng được viết ở trạng thái biến dạng để tính đến độ cứng hình học. So sánh giữa kết quả thực nghiệm và giải tích đã chứng minh độ chính xác của lý thuyết dầm để giải quyết các vấn đề liên quan đến bài toán dầm hơi chịu uốn. Le và Wielgosz đã sử dụng nguyên lý công ảo ở dạng Lagrang và giả thuyết Saint Venant Kirchhoff thông thường với sự chuyển vị và quay hữu hạn để rút ra các phương trình phi tuyến của dầm hơi đẳng hướng. Các phương trình cân bằng phi tuyến đã được tuyến tính hóa dựa trên tham chiếu hình dạng dầm ở dạng ứng suất trước. Các phương trình tuyến tính này đã cải thiện lý thuyết của Fichter.

Mặc dù rất nhiều nhà nghiên cứu đã thực hiện nhiều nỗ lực trong việc phát triển một mô hình giải tích trong nhiều năm qua để giải quyết bài toán dầm hơi, tuy nhiên có thể thấy gần như họ chỉ tập trung vào loại vật liệu vải đẳng hướng.

2.2. Phương pháp số

Ngày nay, tính toán và thiết kế dầm hơi dầm đặt ra những thách thức đáng kể, đặc biệt là trong trường hợp các mô hình giải tích thường không thể áp dụng trong các trường hợp tổng quát về tải trọng và điều kiện biên. Chính vì vậy, một số các nghiên cứu về dầm hơi bằng cách sử dụng các phương pháp số cũng đã được tiến hành. Steeves đã sử dụng phương pháp năng lượng cực tiểu để rút ra một tập hợp các phương trình vi phân thể hiện chuyển vị của dầm bom hơi. Một xấp xỉ đơn giản hóa, trong đó giả sử rằng các mặt cắt ngang của dầm không thay đổi được sử dụng để đưa bài toán về dạng một chiều, một điều quan trọng khác là phương pháp này cho phép bao hàm áp suất vào độ cứng của dầm. Quigley et al. và Cavallaro et al. đã sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn để dự đoán ứng xử tuyến tính dầm vải bom hơi. Tuy nhiên, áp suất trong được xem như như một lực căng trước và được áp dụng bên ngoài dầm. Tuy nhiên, phương pháp này dẫn đến sự gia tăng không giới hạn độ cứng của dầm hơi khi áp suất bom tăng. Wielgosz và Thomas đã nghiên cứu ứng xử uốn của các ống và tấm vải bom hơi, từ đó phát triển một phần tử dầm dựa trên lý thuyết Timoshenko. Trong cách tiếp cận của họ, lực được tạo ra bởi áp lực bom bên trong kể đến cho sự tăng độ cứng của dầm. Tuy nhiên, phần tử này không xem xét nếp gấp vải khi dầm chịu lực. Bouzidi et al. đã phát triển lý thuyết và phương pháp số của cho bài toán uốn hình trụ của màng đẳng hướng điều áp. Tải trọng bên ngoài chủ yếu là một áp lực bình thường cho màng và sự phát triển đã được thực hiện theo các giả định của áp suất bom, chuyển vị lớn và biến dạng hữu hạn. Bài toán được giải dựa trên lý thuyết cực tiểu năng lượng. Suhey et al. cũng trình bày một nghiên cứu về mô phỏng số và thiết kế của một lồng nuôi trồng thủy sản mở đại dương bằng cách sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn cho lý thuyết màng đẳng hướng. Sự không ổn định cho kết quả số gây ra bởi lực màng đã được loại bỏ bằng cách thêm một phần tử (shell) vỏ nhân tạo với độ cứng nhỏ. Mô hình này sau đó đã được so sánh với kết quả từ thuyết dầm sửa đổi cho kết cấu bom hơi, kết quả cho thấy kết quả số và lý thuyết tương quan với nhau. Le và Wielgosz đã rời rạc các phương trình phi tuyến thu được trước đó để xây dựng một mô hình phần tử hữu hạn cho các bài toán tuyến tính của dầm vải đẳng hướng có độ bom hơi cao. Kết quả số của họ thu được dựa trên các phần tử dầm đã được chứng minh là gần như tương tự phương pháp mô phỏng dầm bằng phần tử 3D đẳng hướng, cũng như kết quả phân tích thu được trong Le và Wielgosz. Davids và Davids và Zhang đã xây dựng một phần tử dầm hơi dựa trên lý thuyết Timoshenko để phân tích chuyển vị phi tuyến của dầm vải đẳng hướng điều áp, cũng như khảo sát sự ảnh hưởng của áp lực bom lên ứng xử của dầm. Cơ sở của việc xây dựng phần tử trên là xem xét sự gia tăng của công ảo khi có sự xuất hiện của áp suất bom. Các nghiên cứu tham số cũng đã được phân tích để chứng minh tầm quan trọng của việc kể đến áp lực trong các mô hình của họ. Gần đây, Malm et al. đã sử dụng phần tử màng vải đẳng hướng 3D để dự đoán ứng xử của dầm hơi. So sánh giữa các kết quả thu được từ phương pháp số với các kết quả lý thuyết, thực nghiệm cho thấy độ chính xác của lý thuyết dầm thông thường dùng để mô hình hóa dầm hơi làm bằng vải đẳng hướng. Trong hầu hết các nghiên cứu trước đây, vải luôn được cho là vật liệu đẳng hướng. Tuy nhiên, một số nhóm nghiên cứu cũng đã đề cập đến sự làm việc của dầm hơi làm bằng vải bất đẳng hướng. Plaut et al. đã nghiên cứu ảnh hưởng của tải trọng tuyết và gió trên một vòm bom hơi trong giả định lý thuyết vỏ mỏng tuyến tính của Sanders. Họ đã sử dụng lý thuyết này để xây dựng các phương trình điều chỉnh, bao gồm hiệu ứng của các ứng suất màng ban đầu. Vật liệu được giả định có ứng xử đàn hồi tuyến tính, không đồng nhất và trục hướng, ngoài ra các kết quả xấp xỉ thu được bằng phương pháp Rayleigh-Ritz. Plagianakos et al. cũng đã nghiên cứu việc áp dụng áp suất thấp trên các dầm hơi để ước tính khả năng làm việc của nó đối với các ứng dụng kể đến tải trọng nén dọc trục. Các thí nghiệm nén đã được tiến hành trên một số cột hình trụ với hai đầu là các gối tựa, chuyển vị của kết cấu được đo ở một số vị trí dọc theo nhịp, trong khi các lực dọc trục được xác định thực nghiệm thông qua các phép đo biến dạng. Kết quả so sánh cho thấy sự tương quan tốt giữa kết quả mô phỏng số và kết quả thực nghiệm. Bên cạnh đó, Nguyen et al. đã nghiên cứu một cách tiếp cận giải tích để tìm tải trọng nén tới hạn

cho dầm bơm hơi dựa trên lý thuyết 3D Timoshenko. Về ứng suất ổn định, mô hình dầm bơm hơi được đề xuất đã chứng minh sự điều chỉnh hiệu quả so với các mô hình trước đây, trong đó, phương pháp Lagrangian tổng của động học, lý thuyết Timoshenko, và các lý thuyết công ảo đã được áp dụng để xây dựng các phương trình cơ bản của dầm hơi.

Nhìn chung, có thể thấy một số lượng lớn các nghiên cứu trước đó đã được tiến hành để phát triển các mô hình số để giải quyết bài toán dầm hơi, tuy nhiên, nghiên cứu về ảnh hưởng của vải composite trên ứng xử kết cấu vẫn chưa được nghiên cứu. Bên cạnh đó, tất cả các nghiên cứu trước đây chỉ phát triển dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống.

CHƯƠNG 3: CƠ SỞ LÝ THUYẾT

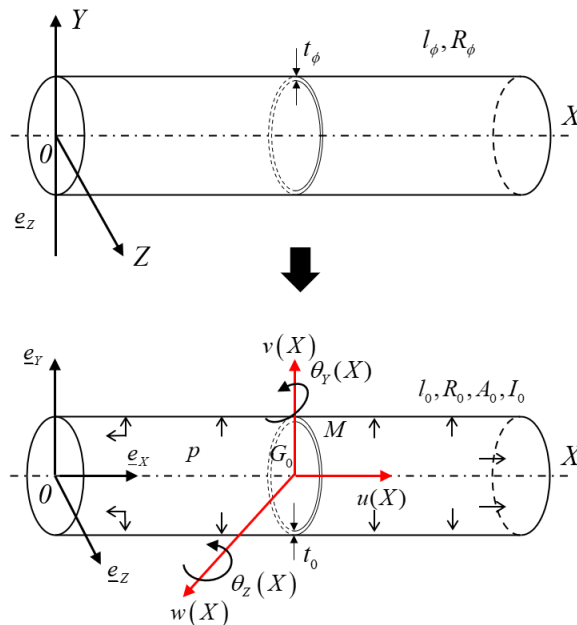
3.1 Tổng quan phương pháp đẳng hình học IGA

Trong chương này, các kiến thức tổng quan về hàm NURBS được tập trung mô tả. Những thông tin cơ bản về IGA và hàm nội suy NURBS có thể được tìm thấy trong các cuốn sách của Piegl. Thuật ngữ phân tích đẳng hình học (IGA) được đề xuất bởi T.J.R. Hughes và các cộng sự, có nghĩa là mô hình phân tích sử dụng các công cụ nội suy dựa trên các công cụ mô tả hình học vật thể và có thể hiểu như là một cải tiến của phân tích isoparametric. Ý tưởng cốt lõi của phân tích đẳng hình học là các hàm được sử dụng cho mô tả hình học trong CAD được sử dụng làm các hàm dạng trong phương pháp số truyền thống. Bằng cách này, toàn bộ quá trình chia lưới có thể được lược bỏ và hai mô hình để thiết kế và phân tích hợp nhất thành một.

3.2 Phương trình ổn định dựa trên lý thuyết cơ học vật rắn biến dạng về các vấn đề ổn định của dầm hơi

3.2.1 Mô tả toán học về dầm hơi

Trong nghiên cứu này, lý thuyết dầm Timoshenko làm từ vật liệu trục hướng được tập trung nghiên cứu. Đối với các kết cấu bơm hơi, tải được áp dụng trong hai giai đoạn: Đầu tiên, dầm bị bơm hơi lên áp suất p và các lực bên ngoài khác lên dầm. Ở bước đầu tiên, áp suất bên trong bằng không và dầm ở trạng thái ban đầu **Hình 3.1a**. Cấu hình tham chiếu tương ứng với giai đoạn đầu tiên được minh họa trong **Hình 3.1b**. Các ứng suất Green-Lagrange được sử dụng để kể đến các phi tuyến hình học.



Hình 3.1 Dầm bơm hơi: (a) ở trạng thái ban đầu và (b) trong cấu hình tham chiếu (trạng thái bơm hơi)

Hình 3.1 cho thấy một dầm hình trụ bơm hơi, trong đó l_0, R_0, t_0, A_0 thể hiện chiều dài, bán kính bên ngoài, độ dày vải, mặt cắt ngang và moment quán tính I_0 xung quanh các trục chính của quán tính Y và Z của dầm. A_0 và được I_0 cho bởi

$$A_0 = 2\pi R_0 t_0 \quad 3.1$$

$$I_0 = \frac{A_0 R_0^2}{2} \quad 3.2$$

trong đó kích thước tham chiếu l_0, R_0 và t_0 phụ thuộc vào áp lực bơm và tính chất cơ học của vải Apedo [45]:

$$l_0 = l_\phi + \frac{pR_\phi l_\phi}{2E_t t_\phi} (1 - 2\nu_{lt}) \quad 3.3$$

$$R_0 = R_\phi + \frac{pR_\phi^2}{2E_t t_\phi} (2 - \nu_{lt}) \quad 3.4$$

$$t_0 = t_\phi + \frac{3pR_\phi}{2E_t} \nu_{lt} \quad 3.5$$

trong đó l_ϕ, R_ϕ và t_ϕ tương ứng là chiều dài, độ dày vải và bán kính bên ngoài của dầm ở trạng thái ban đầu.

Áp suất bên trong p được giả định là không đổi, giúp đơn giản hóa việc phân tích và phù hợp với các quan sát thực nghiệm trong các nghiên cứu trước đây. Áp lực ban đầu diễn ra trước khi tải trọng bên ngoài được áp dụng.

Tỷ lệ độ mảnh là $\lambda_s = \frac{L}{\rho}$ với $L = \mu l_0$ là chiều dài dầm và ρ là bán kính quán tính của

dầm, lấy bằng $\rho = \sqrt{\frac{I_0}{A_0}}$

M là một điểm trên mặt cắt ngang hiện tại và G_0 trọng tâm của mặt cắt ngang hiện tại nằm trên trục X. Hai giả định đơn giản hóa của Fichter được áp dụng như sau:

- Mặt cắt ngang của dầm bơm hơi đang được xem xét được giả định là hình tròn và duy trì hình dạng của nó sau khi biến dạng, do đó không có biến dạng và mất ổn định cục bộ;
- Các góc quay xung quanh các trục quán tính chính của dầm nhỏ và góc quay xung quanh trục dầm là không đáng kể.

3.2.2 Phương trình lý thuyết

3.2.2.1 Quan hệ động học

Vật liệu được giả định là trục hướng và hướng dọc của vải được giả định trùng với trục dầm. Mô hình có thể được điều chỉnh cho phù hợp với trường hợp khác có các trục theo các hướng khác nhau. Trong trường hợp này, một góc quay bổ sung có thể được sử dụng để liên kết các hướng trục hướng và các trục dầm. Trường hợp này không được giải quyết ở đây bởi vì phần lớn các hướng chính trục hướng trùng với hướng dọc và chu vi của dầm được sử dụng trong thực tế. Với các giả thuyết được đề xuất bởi Fichter, các thành phần chuyển vị của một điểm tùy ý $M(X, Y, Z)$ trên dầm là:

$$\underline{\mathbf{u}}(M) = \begin{Bmatrix} \underline{u}_X \\ \underline{u}_Y \\ \underline{u}_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(X) \\ v(X) \\ w(X) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Z\theta_Y(X) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Y\theta_Z(X) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 3.6$$

Trong đó $\underline{u}_x, \underline{u}_y, \underline{u}_z$ là các chuyển vị theo các trục tọa độ, $u(X), v(X)$ và $w(X)$ tương ứng với sự chuyển vị của trọng tâm của mặt cắt hiện tại tại trục X , liên quan đến (X, Y, Z) ; $\theta_y(X)$ và $\theta_z(X)$ là các góc quay của của trọng tâm xung quanh cả hai trục quán tính chính của dầm. Từ đó, một chuyển vị ảo tùy ý tại vị trí hiện tại của điểm vật liệu M là $\delta \underline{\mathbf{u}}$, với

$$\delta \underline{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \delta u(X) \\ \delta v(X) \\ \delta w(X) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Z \delta \theta_y(X) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Y \delta \theta_z(X) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 3.7$$

Định nghĩa của biến dạng tại một điểm tùy ý như một hàm của chuyển vị là:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_l + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{nl} \quad 3.8$$

trong đó $\underline{\mathbf{E}}_l$ và $\underline{\mathbf{E}}_{nl}$ tương ứng là các biến dạng tuyến tính và phi tuyến tính Green-Lagrange. Thuật ngữ phi tuyến có tính đến các phi tuyến hình học. Các trường ứng suất phụ thuộc vào các trường chuyển vị như sau:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_l = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} \\ \frac{\partial u_y}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \\ \frac{\partial u_x}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial X} \\ \frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Y} \end{Bmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{nl} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,x}^T \underline{\mathbf{u}}_{,x} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,y}^T \underline{\mathbf{u}}_{,y} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,z}^T \underline{\mathbf{u}}_{,z} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,x}^T \underline{\mathbf{u}}_{,y} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,y}^T \underline{\mathbf{u}}_{,x} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,x}^T \underline{\mathbf{u}}_{,z} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,z}^T \underline{\mathbf{u}}_{,x} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,y}^T \underline{\mathbf{u}}_{,z} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,z}^T \underline{\mathbf{u}}_{,y} \end{Bmatrix} \quad 3.9$$

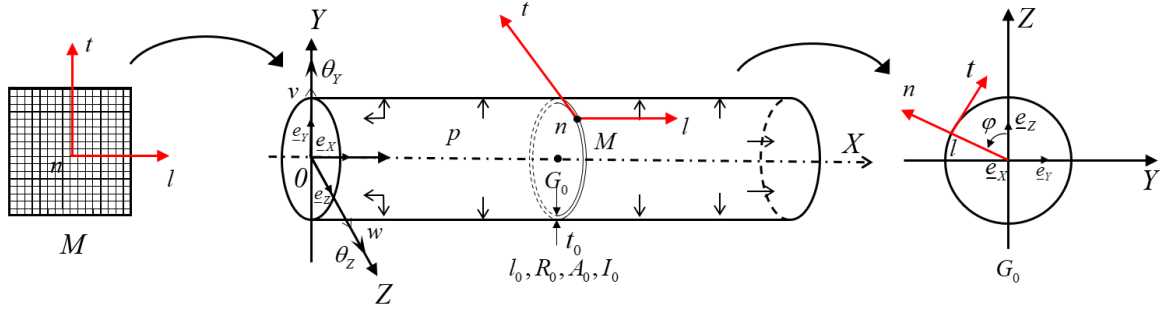
Các thuật ngữ phi tuyến có thứ tự cao hơn là tích của các vectơ được định nghĩa như sau

$$\underline{\mathbf{u}}_{,x} = \begin{Bmatrix} u_{x,x} \\ u_{y,x} \\ u_{z,x} \end{Bmatrix}, \underline{\mathbf{u}}_{,y} = \begin{Bmatrix} u_{x,y} \\ u_{y,y} \\ u_{z,y} \end{Bmatrix}, \underline{\mathbf{u}}_{,z} = \begin{Bmatrix} u_{x,z} \\ u_{y,z} \\ u_{z,z} \end{Bmatrix} \quad 3.10$$

3.2.2.2 Quan hệ ứng suất – biến dạng

Trong phần này, mối quan hệ ứng suất – biến dạng cho vật liệu trục hướng theo định lý Saint Venant-Kirchhoff được sử dụng. Phương trình năng lượng liên quan đến trường hợp này được gọi là phương trình năng lượng tự do Helmholtz. $\Phi_E = \Phi(\underline{\underline{\mathbf{E}}})$. Để mô tả ứng xử của dầm bơm hơi, hai hệ tọa độ cần được xác định: Một hệ tọa độ hướng dọc và hệ tọa độ ngang cục bộ liên quan đến từng điểm của màng trùng với hướng chính của vải như **Hình 3.2a**. Còn lại là hệ tọa độ Cartesian gắn vào dầm như **Hình 3.2b**. Các thành phần của tensor Piola-Kirchhoff thứ hai được đưa ra bởi các mối quan hệ ứng suất phi tuyến $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^o + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^o + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad 3.11$$



Hình 3.2 (a) Hệ tọa độ cục bộ, (b) Hệ tọa độ Cartesian với áp $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ là tensor ứng với áp suất bơm.

Trong đó

- $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ là tensor ứng với áp suất bơm ban đầu
- Tensor Piola-Kirchhoff thứ hai được viết trong hệ tọa độ dầm như sau

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} & S_{XZ} \\ & S_{YY} & S_{YZ} \\ \text{symmetrical} & & S_{ZZ} \end{bmatrix} \quad 3.12$$

- $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ là tensor đàn hồi bậc bốn.

Nhìn chung, tensor áp suất bơm ban đầu được giả định có dạng cầu và đẳng hướng

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = S^o \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad 3.13$$

Trong đó $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ là tensor đơn vị bậc hai và $S^o = \frac{N_o}{A_o}$ là giá trị vô hướng thể hiện giá trị ứng

sức trước. Các tensor thể hiện trong tọa độ trục dầm có thể được tính toán từ tensor đàn hồi trục hướng cục bộ bằng cách sử dụng ma trận quay $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$:

$$C_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} C_{mnpq}^{loc} \quad 3.14$$

Với $i, j, k, m, n, p, q = 1, \dots, 3$, trong đó

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad 3.15$$

và

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{loc} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad 3.16$$

Tensor cuối cùng được thể hiện trong tọa độ trục dầm thu được như

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & c^2 C_{12} & s^2 C_{12} & cs C_{12} & 0 & 0 \\ & c^4 C_{22} & c^2 s^2 C_{22} & c^3 s C_{22} & 0 & 0 \\ & & s^4 C_{22} & cs^3 C_{22} & 0 & 0 \\ & & & c^2 s^2 C_{22} & 0 & 0 \\ & & & & s^2 C_{66} & cs C_{66} \\ \text{symmetrical} & & & & & c^2 C_{66} \end{bmatrix} \quad 3.17$$

Trong đó $c = \cos \varphi$ và $s = \sin \varphi$, với $\varphi = (e_z, n)$ là góc giữa trục Z và vector pháp tuyến của màng. Các thành phần của tensor được cho như sau

$$C_{11} = \frac{E_t}{1 - v_{lt}v_{tl}}; C_{12} = \frac{E_tv_{tl}}{1 - v_{lt}v_{tl}};$$

$$C_{22} = \frac{E_t}{1 - v_{lt}v_{tl}}; C_{66} = G_{lt} \quad \text{and} \quad \frac{E_t}{v_{lt}} = \frac{E_t}{v_{tl}}$$

3.2.3 Nguyên lý công ảo

Các phương trình cân bằng của dầm bơm hơi được xây dựng dựa trên nguyên lý công ảo (VWP). VWP áp dụng cho dầm ở trạng thái ban đầu của nó được thể hiện như sau

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}^d + \delta W_{\text{ext}}^p, \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \quad 3.18$$

$$\Leftrightarrow \int_{V_o} \underline{\mathbf{S}} : \delta \underline{\mathbf{E}} dV_o = \int_{V_o} \mathbf{f} \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} dV_o + \{R \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}\} + \int_{\partial V_o} \mathbf{t} \delta \underline{\mathbf{u}} dA, \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \quad 3.19$$

trong đó \mathbf{f} và \mathbf{t} là lực trên mỗi đơn vị thể tích và màng, được thể hiện như bên trái của **phương trình 3.18**, chúng được xây dựng từ tensor Piola-Kirchhoff $\underline{\mathbf{S}}$ và biến dạng Green $\delta \underline{\mathbf{E}}$

Tensor ứng suất Green được viết trong hệ tọa độ dầm như sau

$$\delta \underline{\mathbf{E}} = \delta \underline{\mathbf{E}}_l + \delta \underline{\mathbf{E}}_{nl} \quad 3.20$$

Trong đó

$$\delta \underline{\mathbf{E}}_l = \left[\delta E_{XX}^l \quad \delta E_{YY}^l \quad \delta E_{ZZ}^l \quad \delta E_{YZ}^l \quad \delta E_{ZX}^l \quad \delta E_{XY}^l \right]^T \quad 3.21$$

$$\delta \underline{\mathbf{E}}_{nl} = \left[\delta E_{XX}^{nl} \quad \delta E_{YY}^{nl} \quad \delta E_{ZZ}^{nl} \quad \delta E_{YZ}^{nl} \quad \delta E_{ZX}^{nl} \quad \delta E_{XY}^{nl} \right]^T \quad 3.22$$

với

$$\begin{aligned} \delta E_{XX}^l &= \delta u_{,X} + Z\delta\theta_{Y,X} - Y\delta\theta_{Z,X} \\ \delta E_{YY}^l &= 0 \\ \delta E_{ZZ}^l &= 0 \\ \delta E_{YZ}^l &= 0 \\ \delta E_{XZ}^l &= \delta w_{,X} + \delta\theta_{Y,X} \\ \delta E_{XY}^l &= \delta v_{,X} - \delta\theta_Z \end{aligned} \quad 3.23$$

và

$$\begin{aligned} \delta E_{XX}^{nl} &= (u_{,X} + Z\theta_{Y,X} - Y\theta_{Z,X})\delta u_{,X} + v_{,X}\delta v_{,X} \\ &\quad + w_{,X}\delta w_{,X} + Z(u_{,X} + Z\theta_{Y,X} - Y\theta_{Z,X})\delta\theta_{Y,X} \\ &\quad - Y(u_{,X} + Z\theta_{Y,X} - Y\theta_{Z,X})\delta\theta_{Z,X} \\ \delta E_{YY}^{nl} &= \theta_Z\delta\theta_Z \\ \delta E_{ZZ}^{nl} &= \theta_Y\delta\theta_Y \\ \delta E_{YZ}^{nl} &= (\theta_Z\delta\theta_Y + \theta_Y\delta\theta_Z) \\ \delta E_{XZ}^{nl} &= \theta_Y\delta u_{,X} + (u_{,X} + Z\theta_{Y,X} - Y\theta_{Z,X})\delta\theta_Y \\ &\quad + Z\theta_Y\delta\theta_{Y,X} - Y\theta_Y\delta\theta_{Z,X} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta E_{XY}^{nl} = & -\theta_z \delta u_{,x} - Z \theta_z \delta \theta_{Y,X} \\ & -s(u_{,x} + Z \theta_{Y,X} - Y \theta_{Z,X}) \delta \theta_z + Y \theta_z \delta \theta_{Z,X} \end{aligned} \quad 3.24$$

Các lực và moment kết quả tổng quát tác động lên mặt cắt tham chiếu A_0 được thể hiện thông qua các ứng suất trong dầm bằng như sau (Q_i ($i = 1, \dots, 10$))

$$\begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{A_0} \begin{Bmatrix} S_{XX} \\ S_{XY} \\ S_{XZ} \\ ZS_{XX} \\ -YS_{XX} \end{Bmatrix} dA_0, \quad 3.25$$

$$Q_i = \int_{A_0} \begin{Bmatrix} -YS_{XX} \\ Z^2 S_{XX} \\ -ZS_{XY} \\ ZS_{XZ} \\ Y^2 S_{XX} \\ YS_{XY} \\ -YS_{XZ} \\ S_{YY} \\ S_{ZZ} \\ -S_{YZ} \end{Bmatrix} dA_0, \quad i = 1, \dots, 10 \quad 3.26$$

trong đó, N tương ứng với lực trục, T_y và T_z là lực cắt theo hướng Y và Z tương ứng, M_y và M_z là moment uốn quanh trục Y và Z . Số lượng các giá trị Q_i phụ thuộc vào hình học ban đầu của mặt cắt ngang:

$$\begin{aligned} N = \int_{A_0} S_{XX} dA = & N^0 + \left\{ C_{11} \left[u_{,x} + \frac{1}{2} (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} C_{12} (\theta_Y^2 + \theta_Z^2) \right\} A_0 + \frac{1}{2} C_{11} I_0 (\theta_{Y,Z}^2 + \theta_{Z,X}^2) \end{aligned} \quad 3.27$$

$$T_y = \int_{A_0} S_{XY} dA = \frac{1}{2} k_y A_0 C_{66} [v_{,x} - \theta_z (1 + u_{,x})] \quad 3.28$$

$$T_z = \int_{A_0} S_{XZ} dA = \frac{1}{2} k_z A_0 C_{66} [w_{,x} - \theta_Y (1 + u_{,x})] \quad 3.29$$

$$M_y = \int_{A_0} ZS_{XX} dA = (1 + u_{,x}) C_{11} \theta_{Y,X} I_0 \quad 3.30$$

$$M_z = - \int_{A_0} YS_{XX} dA = (1 + u_{,x}) C_{11} \theta_{Z,X} I_0 \quad 3.31$$

với

$$Q_1 = - \int_{A_0} YZ S_{XX} dA = \frac{1}{4} I_0 (C_{11} R_0^2 \theta_{Z,X} \theta_{Y,X} - C_{12} \theta_Z \theta_Y) \quad 3.32$$

$$Q_2 = \int_{A_0} Z^2 S_{XX} dA = \left\{ \frac{N^0}{A_0} + C_{11} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8} R_0^2 (3\theta_{Y,X}^2 + \theta_{Z,X}^2) \right] + \frac{1}{8} C_{12} (3\theta_Z^2 + \theta_Y^2) \right\} I_0 \quad 3.33$$

$$Q_3 = - \int_{A_0} Z S_{XY} dA = \frac{1}{4} C_{66} I_0 (3\theta_Z \theta_{Y,X} - \theta_Y \theta_{Z,X}) \quad 3.34$$

$$Q_4 = \int_{A_0} Z S_{XZ} dA = \frac{1}{4} C_{66} I_0 (\theta_Y \theta_{Y,X} - \theta_Z \theta_{Z,X}) \quad 3.35$$

$$Q_5 = \int_{A_0} Y^2 S_{XX} dA = \left\{ \frac{N^0}{A_0} + C_{11} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{8} R_0^2 (\theta_{Y,X}^2 + 3\theta_{Z,X}^2) \right] + \frac{1}{8} C_{12} (\theta_Z^2 + 3\theta_Y^2) \right\} I_0 \quad 3.36$$

$$Q_6 = \int_{A_0} Y S_{XY} dA = \frac{1}{4} C_{66} I_0 (\theta_Z \theta_{Z,X} - \theta_Y \theta_{Y,X}) \quad 3.37$$

$$Q_7 = - \int_{A_0} Y S_{XZ} dA = \frac{1}{4} C_{66} I_0 (3\theta_{Z,X} \theta_Y - \theta_Z \theta_{Y,X}) \quad 3.38$$

$$Q_8 = \int_{A_0} S_{YY} dA = N^0 + \frac{1}{2} A_0 \left\{ C_{12} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{8} C_{22} (3\theta_Z^2 + \theta_Y^2) \right\} + \frac{1}{8} C_{12} I_0 (3\theta_{Y,X}^2 + \theta_{Z,X}^2) \quad 3.39$$

$$Q_9 = \int_{A_0} S_{ZZ} dA = N^0 + \frac{1}{2} A_0 \left\{ C_{12} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{8} C_{22} (3\theta_Y^2 + \theta_Z^2) \right\} + \frac{1}{8} C_{12} I_0 (3\theta_{Z,X}^2 + \theta_{Y,X}^2) \quad 3.40$$

$$Q_{10} = - \int_{A_0} S_{YZ} dA = \frac{1}{8} C_{22} A_0 \theta_Y \theta_Z - \frac{1}{4} C_{12} I_0 \theta_{Y,X} \theta_{Z,X} \quad 3.41$$

sau đó, công việc ảo có thể được viết như sau

$$-\delta W_{\text{int}} = \int_0^{l_0} \left\{ \begin{array}{c} A_1(X) \\ B_1(X) \\ C_1(X) \\ D_1(X) \\ E_1(X) \\ F_1(X) \\ H_1(X) \end{array} \right\}^T \times \left\{ \begin{array}{c} \delta u_{,X} \\ \delta v_{,X} \\ \delta w_{,X} \\ \delta \theta_{,Y} \\ \delta \theta_{Y,X} \\ \delta \theta_Z \\ \delta \theta_{Z,X} \end{array} \right\} dX \quad 3.42$$

Với các giá trị $A_1(X), B_1(X), C_1(X), D_1(X), E_1(X), F_1(X)$ và $H_1(X)$

$$A_1(X) = \left\{ \begin{array}{c} N \\ M_y \\ M_z \\ -T_y \\ T_z \end{array} \right\}^T \times \left\{ \begin{array}{c} 1+u_{,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_Z \\ \theta_Y \end{array} \right\} \quad 3.43$$

$$B_1(X) = \left\{ \begin{array}{c} N \\ T_y \end{array} \right\}^T \times \left\{ \begin{array}{c} v_{,X} \\ 1 \end{array} \right\} \quad 3.44$$

$$C_1(X) = \left\{ \begin{array}{c} N \\ T_z \end{array} \right\}^T \times \left\{ \begin{array}{c} w_{,X} \\ 1 \end{array} \right\} \quad 3.45$$

$$D_1(X) = \left\{ \begin{array}{c} T_z \\ Q_4 \\ Q_7 \\ Q_9 \\ Q_{10} \end{array} \right\}^T \times \left\{ \begin{array}{c} 1+u_{,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{array} \right\} \quad 3.46$$

$$E_1(X) = \left\{ \begin{array}{c} M_y \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{array} \right\}^T \times \left\{ \begin{array}{c} 1+u_{,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_Z \\ \theta_Y \end{array} \right\} \quad 3.47$$

$$F_1(X) = \left\{ \begin{array}{c} -T_y \\ Q_3 \\ Q_6 \\ Q_8 \\ Q_{10} \end{array} \right\}^T \times \left\{ \begin{array}{c} 1+u_{,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_Z \\ \theta_Y \end{array} \right\} \quad 3.48$$

$$H_1(X) = \begin{Bmatrix} M_z \\ Q_5 \\ Q_1 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} 1+u_{,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_Z \\ \theta_Y \end{Bmatrix} \quad 3.49$$

Công ảo của ngoại lực δW_{ext} được gây ra bởi trọng lực (tĩnh tải) và tải trọng ngoài.

Tĩnh tải, có thể bao gồm tải trọng và moment tập trung cũng như tải trọng phân bố, hoạt động giống như lực thể tích. Áp lực bơm đóng một vai trò như lực kéo tác động lên bề mặt hình trụ và ở cả hai đầu dầm. Đại lượng đầu tiên ở phía bên phải của **phương trình 3.19** có thể được viết lại dưới dạng như sau

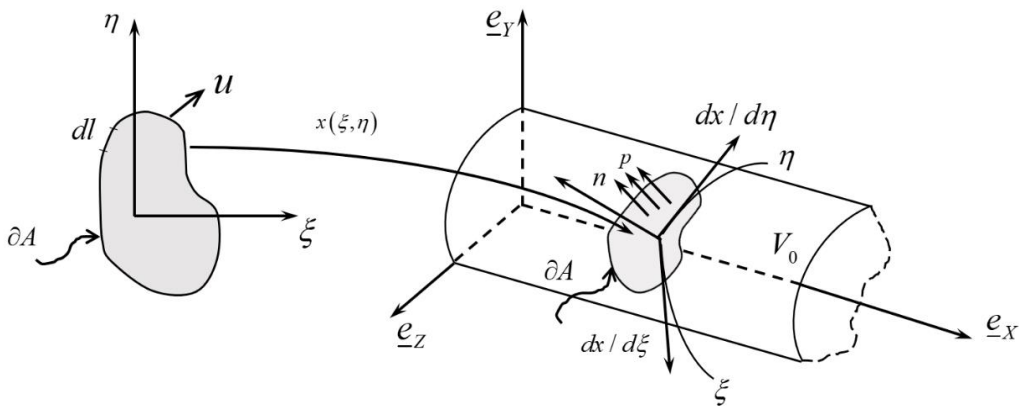
$$\delta W_{ext}^d = \int_0^{l_0} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} dX$$

$$+ \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} F_X(X_i) \\ F_Y(X_i) \\ F_Z(X_i) \\ M_Y(X_i) \\ M_Z(X_i) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta u(X_i) \\ \delta v(X_i) \\ \delta w(X_i) \\ \delta \theta_Y(X_i) \\ \delta \theta_Z(X_i) \end{Bmatrix} \quad 3.50$$

Trong đó, f_x , f_y và f_z tương ứng là tải trọng phân bố dọc theo trục X , Y và Z , trong khi $F_a(b)$ và $M_a(b)$ (với $a = X, Y, Z; b = X_1, \dots, X_n$) là các phản lực từ các gối tựa và tải trọng và moment bên ngoài.

Đại lượng thứ hai ở phía bên phải của **phương trình 3.19** là công ảo gây ra bởi áp lực bơm. Công ảo này bao gồm công ảo áp lực trên bề mặt hình trụ δW_{cyl}^p và ở cả hai đầu dầm δW_{end}^p . **Hình 3.3** thể hiện một dầm bơm hơi với cấu hình tham chiếu hình trụ có áp suất đồng đều p tác động lên bề mặt hình trụ A , với vector pháp tuyến là \underline{n} . Lực bề mặt \underline{t} trong **phương trình 3.19** được thể hiện là công ảo do áp lực bơm δW_{ext}^p

$$\delta W_{ext}^p = \delta W_{cyl}^p + \delta W_{end}^p = \int_A p \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dA \quad 3.51$$



Hình 3.3 Áp suất phân bố lên bề mặt hình trụ

Để xác định công ảo của thành phần áp suất p ($\delta W_{cyl}^p(\xi, \eta)$) tọa độ cong được sử dụng như trong hình **Hình 3.4**:

$$\begin{cases} \xi = R_o \alpha \\ \eta = X \end{cases} \quad 3.52$$

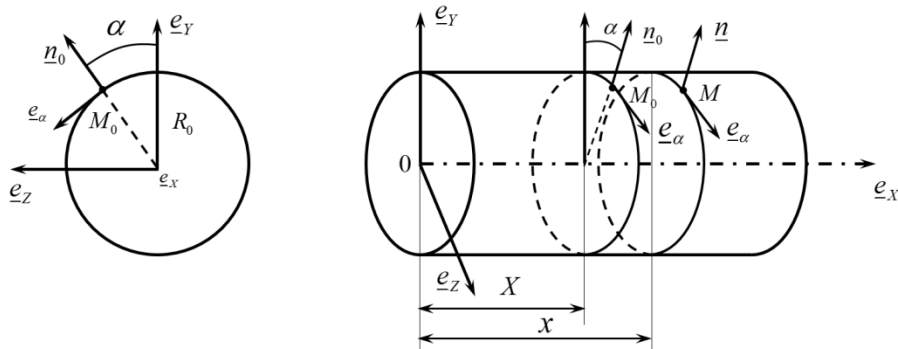
Trong đó α là góc giữa vector pháp tuyến \underline{n} ở vị trí hiện tại \underline{x} và \underline{e}_y . Tọa độ của một điểm vật liệu được đưa ra bởi M_o là

$$\underline{OM}_o = \underline{X} = \begin{pmatrix} X \\ R_o \cos \alpha \\ R_o \sin \alpha \end{pmatrix} \quad 3.53$$

Vector vị trí tại cấu hình hiện tại sau đó được tính như sau

$$\underline{OM} = \underline{x} = \underline{X} + \underline{U} = \begin{pmatrix} X + u(X) - R_o \theta_z \cos \alpha + R_o \theta_y \sin \alpha \\ v(X) + R_o \cos \alpha \\ w(X) + R_o \sin \alpha \end{pmatrix} \quad 3.54$$

Bằng cách tham số hóa các thông số, các thành phần vector pháp tuyến và diện tích có thể được thể hiện dưới dạng các vector tiếp tuyến $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ và $\frac{\partial x}{\partial \eta}$



Hình 3.4 Định nghĩa của hệ tọa độ cong

Trong đó

$$\underline{n} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\|} = \frac{\frac{\partial x}{R_o \partial \alpha} \times \frac{\partial x}{\partial X}}{\left\| \frac{\partial x}{R_o \partial \alpha} \times \frac{\partial x}{\partial X} \right\|}; \quad 3.55$$

và

$$\begin{aligned} dA &= \left\| \frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right\| d\xi d\eta \\ &= \left\| \frac{\partial x}{R_o \partial \alpha} \times \frac{\partial x}{\partial X} \right\| R_o d\alpha dX \end{aligned} \quad 3.56$$

Sau đó, δW_{cyl}^p có thể được tính như sau:

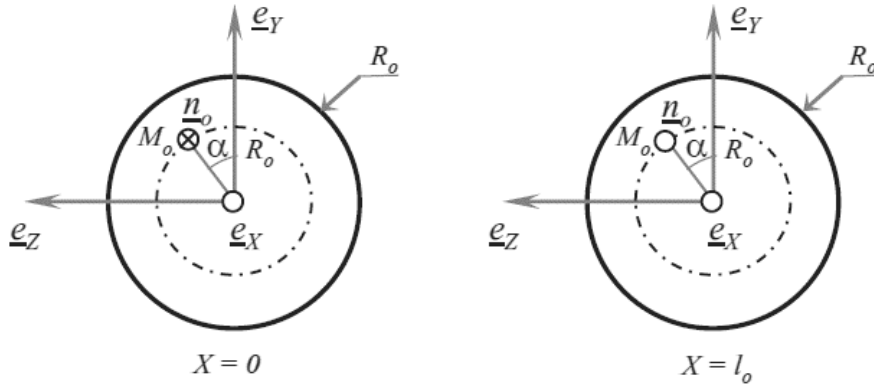
$$\delta W_{cyl}^p = \int_A p \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad 3.57$$

$$= F_p \int_0^{l_o} \begin{bmatrix} -\theta_{Z,X} & \theta_{Y,X} & -w_{,X} & v_{,X} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta v \\ \delta w \\ \delta \theta_Y \\ \delta \theta_Z \end{Bmatrix} dX \quad 3.58$$

Công ảo của áp suất ở hai đầu dầm có thể được xác định một cách tương tự: bề mặt tròn tham chiếu ($X = 0$ và $X = l_o$) có thể được thể hiện bằng tọa độ cong $(\xi, \eta) = (r, r\alpha)$

$$\delta W_{end}^p = \int_A p \underline{\mathbf{n}} \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}(l_o) dA - \int_A p \underline{\mathbf{n}} \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}(0) dA \quad 3.59$$

$$= \left[\begin{bmatrix} 1 & \theta_Z(X_o) & -\theta_Y(X_o) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta u(X_o) \\ \delta v(X_o) \\ \delta w(X_o) \end{Bmatrix} \right]_0^{l_o} \quad 3.60$$



Hình 3.5 Định nghĩa tọa độ cơ sở cong ở đầu dầm

Từ phương trình 3.57 và phương trình 3.59, δW_{ext}^p được đưa ra bởi

$$\delta W_{ext}^p = F_p \int_0^{l_o} \begin{bmatrix} -\theta_{Z,X} & \theta_{Y,X} & -w_{,X} & v_{,X} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta v \\ \delta w \\ \delta \theta_Y \\ \delta \theta_Z \end{Bmatrix} dX \quad 3.61$$

$$+ \left[\begin{bmatrix} 1 & \theta_Z(X_o) & -\theta_Y(X_o) \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta u(X_o) \\ \delta v(X_o) \\ \delta w(X_o) \end{Bmatrix} \right]_0^{l_o}$$

với $F_p = p\Pi R_o^2$ là lực gây ra do áp lực bơm.

Ở đây nên lưu ý rằng phương trình 3.61 hiệu ứng lực của tải trọng bên ngoài do áp lực bơm phụ thuộc vào chuyển vị và góc quay tại vị trí điểm đang xem xét.

CHƯƠNG 4: PHÂN TÍCH HIỆN TƯỢNG MẤT ỔN ĐỊNH CỦA DẦM HƠI DỰA TRÊN PHƯƠNG PHÁP ĐẲNG HÌNH HỌC IGA

4.1 Giới thiệu

Trong thời gian gần đây, chỉ có một vài nghiên cứu liên quan đến bài toán phân tích ổn định của các kết cấu bơm hơi, trong đó gần như không có nghiên cứu nào sử dụng các phương pháp số tiên tiến, chẳng hạn như phương pháp IGA, để phân tích ứng xử mất ổn định của dầm bơm hơi composite. Do đó, nghiên cứu này tập trung vào việc phân tích mất ổn định tuyến tính và phi tuyến tính của dầm bơm hơi.

4.2 Phát triển công thức cho bài toán mất ổn định dựa trên phương pháp IGA

4.2.1 Bài toán mất ổn định tuyến tính

Trong bài toán phân tích mất ổn định tuyến tính, dầm chịu tensor áp suất dự ứng lực ban đầu $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^0$. Trong bước tính toán đầu tiên, dầm được gán mức tải tham chiếu tùy ý $\{\mathbf{F}_{ref}\}$ và thực hiện phân tích tuyến tính tiêu chuẩn để xác định ứng suất trong phần tử trên dầm. Ma trận độ cứng ứng suất $[\mathbf{k}_\sigma]$ và ma trận độ cứng đàn hồi $[\mathbf{k}]$ cũng được thiết lập. Năng lượng biến dạng của dầm trên mỗi đơn vị thể tích là $\frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{S}}}^T\underline{\underline{\mathbf{E}}}$. Như đã trình bày trong trường trước, các phương trình cân bằng được phát triển dựa trên nguyên tắc công việc ảo. Bằng cách lấy tích phân đối với miền thể tích của dầm và đối với phần diện tích mặt cắt ngang A_o và chiều dài l_o , biểu thức năng lượng biến dạng ảo của dầm bơm hơi có thể được triển khai như sau:

$$\delta U_e = \int_{V_o} \left\{ (\underline{\underline{\mathbf{S}}}^0)^T \delta \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \delta \underline{\underline{\mathbf{E}}} \right\} dV_o = \delta U_m + \delta U_b \quad 4.1$$

Trong đó U_m và U_b là năng lượng biến dạng màng và năng lượng biến dạng uốn.

Thành phần năng lượng biến dạng δU_m của dầm có liên quan đến ma trận độ cứng ứng suất $[\mathbf{k}_\sigma]$ và δU_b liên quan đến độ cứng đàn hồi $[\mathbf{k}]$

$$\delta U_m = [\delta \mathbf{d}^T][\mathbf{k}_\sigma][\mathbf{d}] \quad 4.2$$

$$\delta U_b = [\delta \mathbf{d}^T][\mathbf{k}][\mathbf{d}] \quad 4.3$$

Bằng cách áp dụng quy trình rời rạc hóa, hệ phương trình tổng quát thu được như sau

$$\delta U_e = \{\delta \mathbf{d}\}^T \left([\mathbf{k}] + \lambda [\mathbf{k}_{ref}] \right) \{\mathbf{d}\} \quad 4.4$$

Trong đó λ là hệ số tỷ lệ, với $F = \lambda F_{ref}$ là lực nén dọc trục.

Các phương trình cân bằng có thể thu được bằng cách áp dụng nguyên tắc cực tiểu năng lượng. Từ đó, bài toán mất ổn định tuyến tính được thể hiện dưới dạng bài toán trị riêng như sau:

$$\left([\mathbf{K}] + \lambda_i [\mathbf{K}_{ref}] \right) \{\delta \mathbf{D}\} = 0 \quad 4.5$$

4.2.2 Bài toán mất ổn định phi tuyến

Dựa trên phương pháp Lagrangian tổng, trong đó chuyển vị của dầm được tính toán dựa trên cấu hình ban đầu, bài toán phi tuyến hình học của dầm hơi được thiết lập để phân tích hiện tượng mất ổn định của dầm khi chịu nén đúng tâm. Một ma trận độ cứng tiếp tuyến $[\mathbf{K}_T]$, bao

gồm các hiệu ứng thay đổi hình học cũng như ảnh hưởng của áp suất bơm được thiết lập. Tải trọng dọc tương ứng với bước tải i^{th} được biểu thị bằng công thức sau:

$$\{\mathbf{f}_i\} = \{\mathbf{f}_{i-1}\} + i\{\Delta\mathbf{f}\} \quad 4.6$$

Với một phần tử đã biết, phương trình cân bằng phi tuyến có thể được xây dựng dưới dạng

$$[\mathbf{k}_T]\{\Delta\mathbf{d}\} = \{\mathbf{f}_i\} \quad 4.7$$

Trong đó $[\mathbf{k}_T]$ là ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử, và $\{\mathbf{f}_i\}$ và $\{\Delta\mathbf{d}\}$ là vectơ tải gia tăng và vector chuyển vị cần tìm. Sau khi lắp ghép các ma trận phần tử, phương trình cân bằng của bài toán được thể hiện như sau:

$$[\mathbf{K}_T]\{\Delta\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}_i\} \quad 4.8$$

Phương trình 4.8 có thể được giải bằng thuật toán Newton với các bước điều chỉnh tải $\{\Delta\mathbf{F}\}$, và cập nhật ma trận $[\mathbf{K}_T]$ sau mỗi bước tải. Ở đây, vector chuyển vị thu được sau mỗi bước lặp là $\{\mathbf{D}\}_i = \{\mathbf{D}\}_{i-1} + \{\Delta\mathbf{D}\}$, với $\{\Delta\mathbf{D}\}$ là phần gia tăng chuyển vị xác định ở bước tải i và $\{\mathbf{D}\}_{i-1}$ là vector chuyển vị ở bước tải trước đó. Điều kiện hội tụ được lấy như sau

$$\|\{\Delta\mathbf{D}\}_i\| = \left(\{\Delta\mathbf{D}\}_i^T \{\Delta\mathbf{D}\}_i \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0.0001 \quad 4.9$$

hoặc

$$\|\{\mathbf{R}\}_i\| = \left(\{\mathbf{R}\}_i^T \{\mathbf{R}\}_i \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0.0001 \quad 4.10$$

với $\{\mathbf{R}\}_i = \{\mathbf{R}(\mathbf{D}_{i-1})\} = [\mathbf{K}_T]\{\Delta\mathbf{D}_i\}$ là vector lực dư không cân bằng. Khi một điểm giới hạn được tiếp cận $\{\Delta\mathbf{D}\}$, gia tăng chuyển vị trở nên rất lớn. Tại một điểm hạn chế hoặc điểm phân chia, $[\mathbf{K}_T]$ trở nên suy biến.

Qui trình chung của thuật toán ở cấp độ phần tử (quy trình tích hợp số để tính toán ma trận độ cứng ở phần tử thứ j^{th}) được mô tả như sau:

Thông số tính toán: Vector chuyển vị gia tăng $\{\Delta\mathbf{D}_i\}$ của phần tử thứ j .

Các thông số cần tính: Ma trận độ cứng phần tử $[\mathbf{K}_T^e]$, vectơ tải phần tử $\{\mathbf{F}_{int}^e\}$ và $\{\mathbf{F}_{ext}^e\}$.

Lực hiện vòng lặp dựa trên số điểm Gauss theo hướng ζ :

Cho $m = 1$ đến 3, thực hiện

Đặt $\zeta = \zeta_m$ và lấy trọng số tương ứng W_m ,

Gọi chương trình con để tính hàm dạng, ma trận phần tử $[\mathbf{B}]$ và toán tử Jacobian J , tại tất cả các điểm ζ_m .

Tính $[\mathbf{B}]^T ([\Psi_{int}] - [\Psi_{ext}])[\mathbf{B}] \cdot W_m$ và công dồn vào ma trận $[\mathbf{K}_T^e]$

Tính toán hệ số tải nội bộ của phần tử $\{T_{int}^e\} \cdot W_k$ và công dồn vào $\{\mathbf{F}_{int}^e\}$

Tính toán hệ số tải bên ngoài phần tử $(\{T_{ext}^d\} + \{T_{ext}^p\}) \cdot W_k$ và công dồn vào $\{\mathbf{F}_{ext}^e\}$

kết thúc vòng lặp

4.3 Ví dụ số

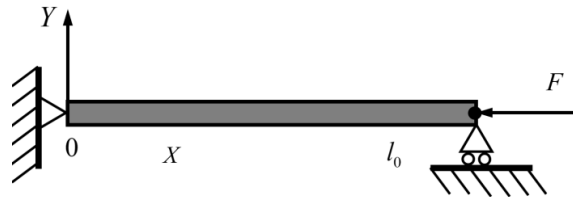
Trong phần này, một số ví dụ số được thực hiện trình bày kết quả thu được từ chương trình tính được thiết lập ở phần trước. Tỷ lệ độ mảnh được định nghĩa là $\lambda_s = L / \rho$, trong đó chiều dài tính toán được xác định theo $L = \mu l_0$

4.3.1 Phân tích mất ổn định tuyến tính

Các thông số về vật liệu, hình học và giá trị áp suất được sử dụng trong ví dụ này được trình bày trong **Bảng 4.1**.

Bảng 4.1 thông số đầu vào để mô hình hóa mô hình LFEIB

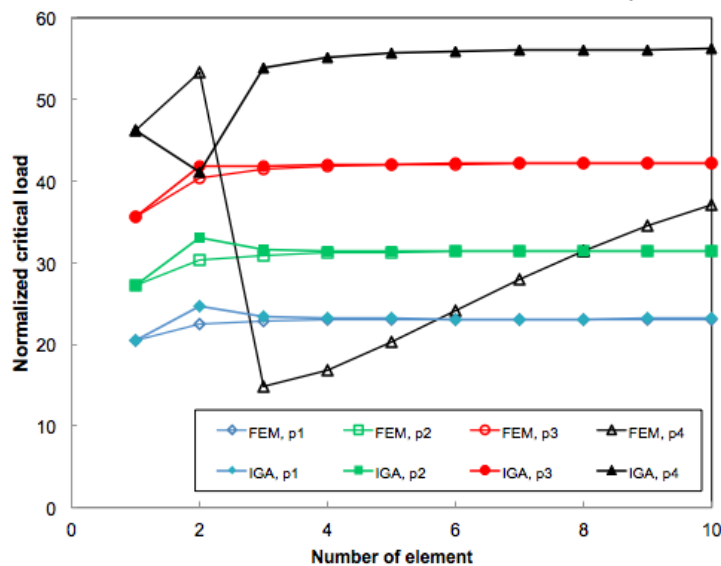
t_ϕ (m)	125×10^{-6}	
k_y	0.5	
Điều kiện biên	Dầm đơn giản	Dầm công xôn
R_ϕ (m)	0.08	0.08
l_ϕ (m)	1.15	0.65
Mô đun đàn hồi (MPa) E	250	250
Hệ số Poisson, ν	0.3	0.3
Áp suất bơm (kPa)	p1	10
	p2	20
	p3	30
	p4	40



Hình 4.1 Mô hình của một dầm bơm hơi được hỗ trợ đơn giản chịu tải nén trục.

Trong **Hình 4.1** một dầm hơi composite hình trụ liên kết khớp hai đầu và chịu tải nén dọc trục. Các thông số đầu vào được trình bày trong **Bảng 4.1**. Điều kiện biên đối với dầm đơn giản có thể được diễn tả như sau

$$u = v = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = l_0 \quad v = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = l_0$$



Hình 4.2 Bài toán mất ổn định tuyến tính: kiểm tra hội tụ và so sánh với kết quả FEM với hệ số tải mất ổn định cho mô hình dầm đơn giản LFEIB. ($K_c^I = 10^5 \times \sigma_{cr} / E_{eq}$)

Bảng 4.2 Hệ số tải trọng mất ổn định của dầm đơn giản LFEIB

Áp suất (kPa)	Nghiệm chính xác (1)	FEM (2)	IGA (3)	Sai số (%)	
				(2) & (1)	(3) & (1)
10	25.31	23.11	23.12	8.69	8.65
20	33.48	31.42	31.43	6.15	6.12
30	43.27	42.22	42.22	2.43	2.43
40	54.72	31.15	56.18	43.07	2.67

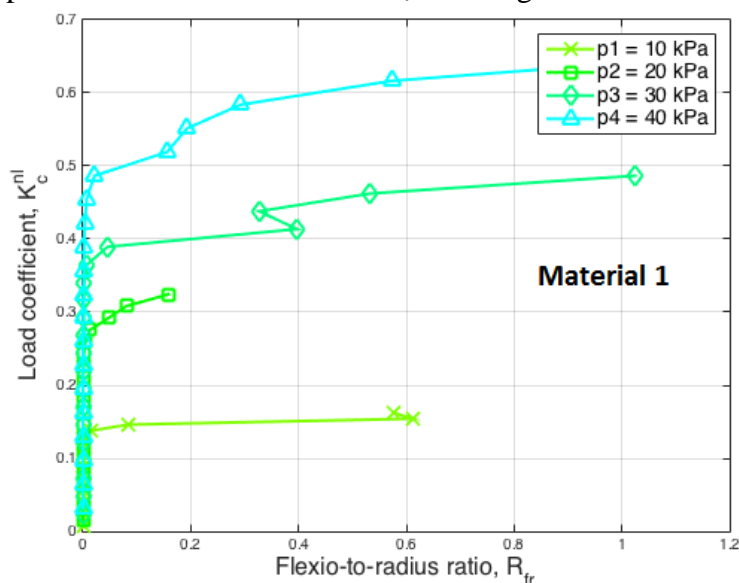
Như trong hình **Hình 4.2**, các bài toán hội tụ cho thấy 4 phần tử dầm Timoshenko dựa trên hàm NURBS bậc hai là đủ để có được kết quả hội tụ tối ưu. Kết quả thu được từ IGA cũng khá tương đồng với kết quả có được từ phần tử 3 nút tiêu chuẩn Timoshenko FEM của ông Nguyễn.

4.3.2 Phân tích mất ổn định phi tuyến

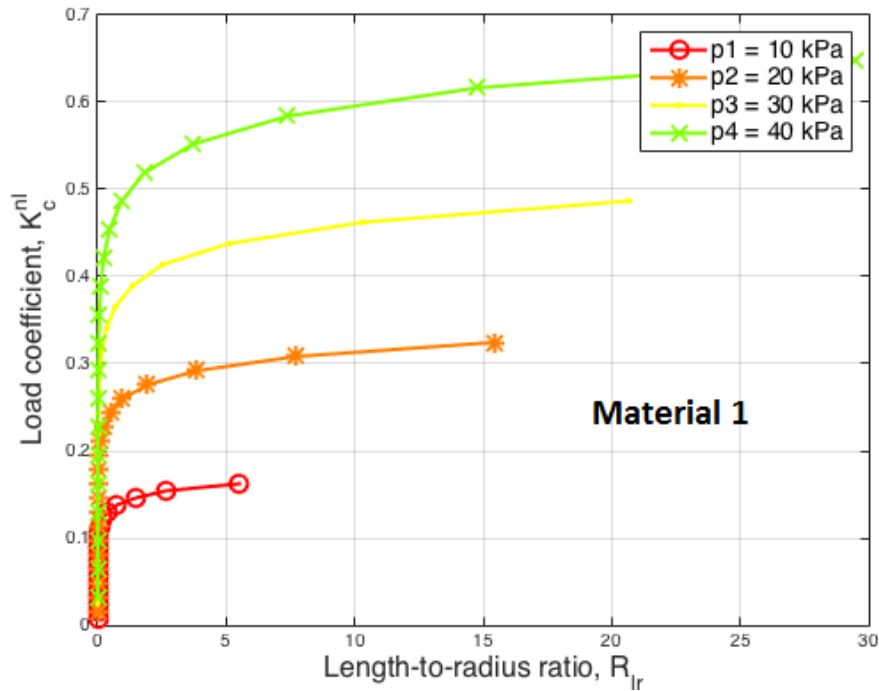
Tải trọng tới hạn được tính toán trong phân tích mất ổn định tuyến tính ở trên chỉ thích hợp trong trường hợp có rất ít hoặc không có sự liên hệ trực tiếp giữa biến dạng màng và biến dạng uốn. Với sự xuất hiện của những khuyết ban đầu của dầm, khi lực nén tác dụng lên dầm, bài toán ứng xử thực tế nên được xem xét là bài toán chuyển vị lớn hơn là bài toán mất ổn định. Do đó, phân tích mất ổn định tuyến tính có thể đưa ra lời giải không đúng cho bài toán mất ổn định. Vì vậy, bài toán mất ổn định phi tuyến của một dầm bơm hơi với điều kiện biên là các gối tựa đơn chịu tải trọng nén trục F được phân tích.

Hình 4.3 minh họa sự thay đổi của tỷ lệ uốn cong trên bán kính và tỷ lệ chiều dài trên bán kính với gia số tham số tải chuẩn hóa K_c^{nl} trong hai trường hợp vật liệu khác nhau. Ở các trường hợp có áp suất cao, các hệ số ứng xử tỷ lệ R_{fr} gần như tuyến tính. Các đường cong trở nên phi tuyến dần dần ở mức cao hơn của K_c^{nl} .

Ảnh hưởng của điều kiện biên và tính chất vật liệu được minh họa rõ ràng bằng ứng xử của dầm bơm hơi đơn giản (SS). Trong trường hợp vật liệu 1 có mô đun đàn hồi thấp, mất ổn định của dầm SS nhạy hơn ở mức áp suất bên trong cao. Nó xuất hiện chế độ nhảy ứng xử khi dầm chịu được tải nén dọc trục tăng lên. Ngược lại, sự biến dạng trong độ lệch tải không xảy ra trong trường hợp của dầm bơm hơi với điều kiện biên ngàm.



Hình 4.3 Mất ổn định phi tuyến: tỷ lệ flexion-to-radius ($R_{fr} = D_v / R_o$) với tham số tải phi tuyến chuẩn hóa ($K_c^{nl} = 10^6 \times F_i / (E_{eq} A_0)$) cho mô hình dầm đơn giản NLFEIB.



Hình 4.4 Mất ổn định phi tuyến: tỷ lệ chiều dài trên bán kính ($R_{lr} = D_u / R_o$) với tham số tải phi tuyến được chuẩn hóa K_c^{nl} cho mô hình dầm đơn giản NLFEIB.

CHƯƠNG 5: THÍ NGHIỆM MẤT ỔN ĐỊNH CỦA DẦM HƠI

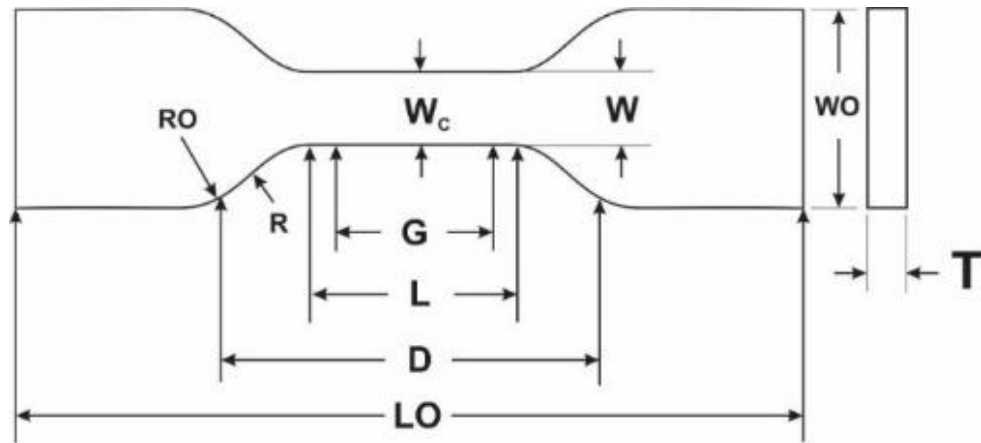
5.1 Giới thiệu

Trong chương này, các phương pháp lựa chọn vật liệu và quy trình tạo mẫu thí nghiệm dầm hơi được trình bày. Một chương trình thực nghiệm để khảo sát ứng xử mất ổn định của dầm bơm hơi được chế tạo từ vật liệu vải dệt composite được trình bày, trong đó các giá trị khác nhau của áp suất bên trong cũng được xem xét đến.

5.2 Tính chất vật liệu và lựa chọn vải

Các tính chất cơ học của vải dệt được kiểm tra trước khi chế tạo dầm bơm hơi. Quy trình kiểm tra dựa trên tiêu chuẩn STM-D638/Mẫu IV.

Một mẫu thí nghiệm dạng xương chó cho thí nghiệm kéo có kích thước hình học được trình bày như trong **Hình 5.1**.



Hình 5.1 Mẫu thí nghiệm chịu kéo

Quy trình thực nghiệm tuân theo hướng dẫn của tiêu chuẩn ASTM D638, bao gồm việc xác định các tính chất kéo của vật liệu được thi công và gia công dưới dạng mẫu thử tiêu chuẩn.

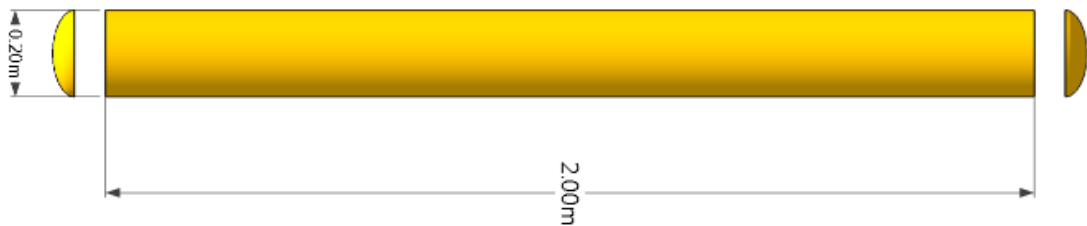
5.3 Mẫu dầm bơm hơi

Việc chế tạo mẫu dầm bơm hơi đòi hỏi phải quan tâm nhiều hơn để tránh rò rỉ không khí. Thứ nhất, thân dầm được chế tạo bằng cách nối vải dọc theo chiều dài của dầm với dán PVC 2,5 cm. Các thông số hình học của các mẫu dầm với dạng hình trụ có các thông số như sau:

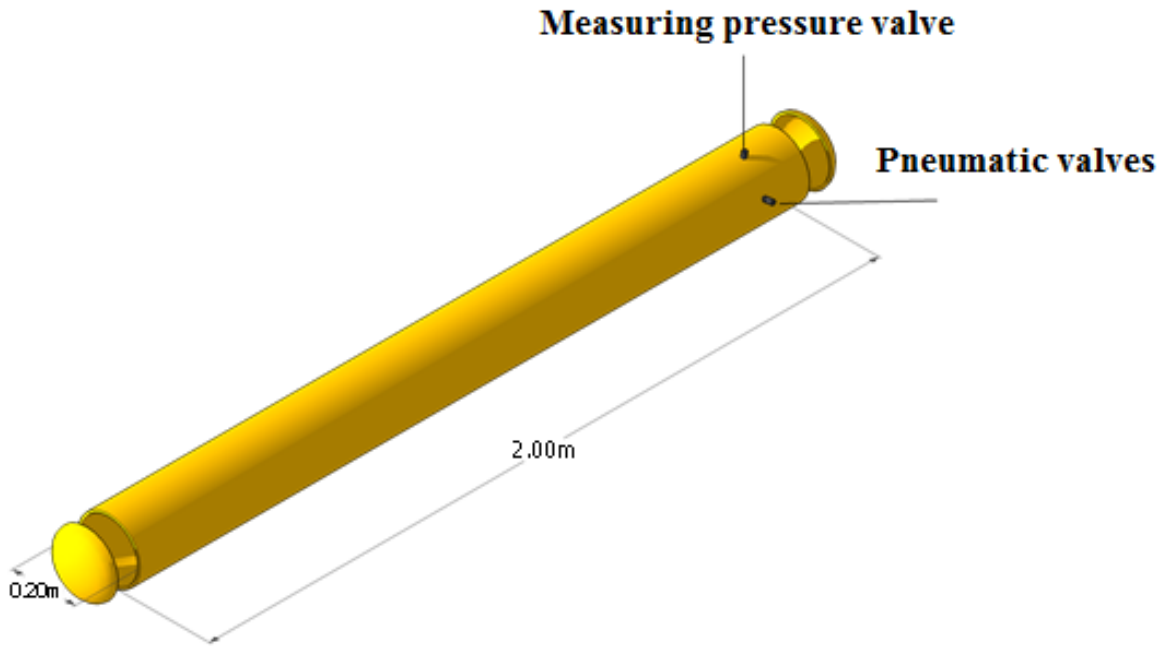
Chiều dài ban đầu: $L = 200\text{cm}$ (không bao gồm 2 mũ ở 2 đầu)

Bán kính ngoài: $R = 10\text{cm}$

Theo dữ liệu của thí nghiệm, vật liệu của mẫu 1 (sợi màu vàng) đã được chọn để thiết kế các mẫu dầm bơm hơi. Kết cấu của 2 van bơm và áp kế ở vị trí cách cuối dầm 20cm. Một lỗ nên được đặt xa lỗ còn lại theo một góc (60° - 90°).



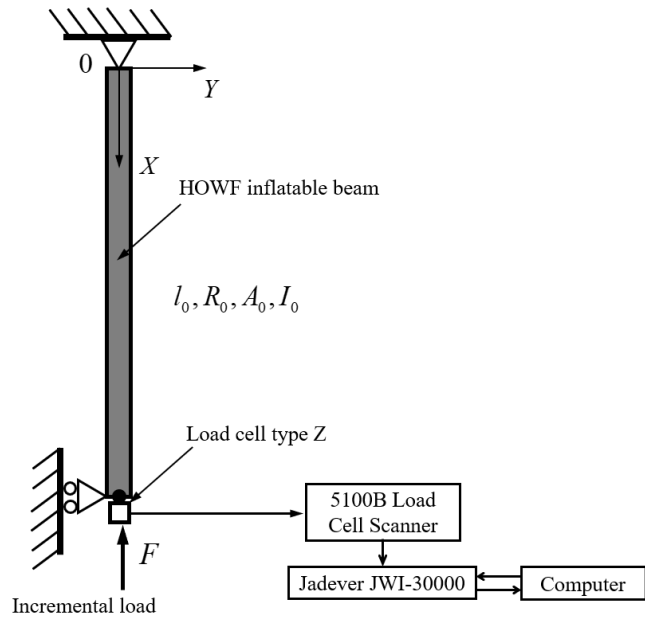
Hình 5.2 Thiết kế dầm bơm hơi



Hình 5.3 Van bơm và áp kế

5.4 Thiết lập thí nghiệm kiểm tra mất ổn định

Trong nghiên cứu này, ba dầm bơm hơi hình trụ được chế tạo với bán kính $R = 100\text{mm}$ và chiều dài của $L = 2\text{m}$. Tải nén F được tăng dần ở một đầu dầm: lúc đầu, một đầu dầm đặt lại tải F về không, và sau đó tăng dần đến F . Để hình dung các độ lệch bên của dầm trong quá trình áp lực nén dọc trục, một máy đo tốc độ độ chính xác là 1mm đã được sử dụng. Trình tự này được lặp lại cho đến khi các nếp gấp đầu tiên xuất hiện, và được gọi là điểm phá hoại. Đầu tiên, dầm phải chịu áp suất bên trong p , theo đó dầm ở trạng thái dự ứng lực. Tải trọng bên ngoài F được áp dụng bởi một ngăn xếp theo hướng trục của dầm.



Hình 5.4 Sơ đồ của dầm bơm hơi HOWF đơn giản và thiết bị đo lường để kiểm tra mất ổn định của dầm

Sau khi thiết lập các thiết bị đo, dầm được bơm hơi lên đến một áp suất nhất định để duy trì hình dạng của dầm, sau đó đặt dầm vào khung thực nghiệm. Dầm sau đó được bơm hơi lên

đến áp suất thiết kế. Vì đường kính của dầm được mở rộng khi tăng áp suất không khí, các vòng trên và dưới cần được điều chỉnh để phù hợp với dầm (**Error! Reference source not found.**)



Hình 5.5 Vòng định vị có thể được điều chỉnh đường kính

Sau khi bơm hơi dầm, tải trọng nén trục được tăng dần ở đầu dưới cùng. Giá trị tải được theo dõi thông qua việc thu thập dữ liệu để kiểm soát tốc độ tải. Một mẫu dầm sẽ được thực nghiệm với bốn giá trị khác nhau của áp suất bơm, 20 kPa, 40 kPa, 60 kPa và 80 kPa. Có thể thấy trong **Hình 5.6**, các nếp gấp xuất hiện ở cùng một vị trí của dầm và không phụ thuộc vào giá trị áp suất bơm.



Hình 5.6 Vị trí nếp gấp đầu tiên xuất hiện



Hình 5.7 Những nếp gấp đầu tiên xuất hiện

Nếp gấp đầu tiên cho thấy hình dạng phá hoại khi dầm bị mất ổn định và chuyển vị lớn nhất xảy ra ở vị trí nếp gấp.

5.5 Kết quả thí nghiệm

Một thí nghiệm điển hình bao gồm các bước sau:

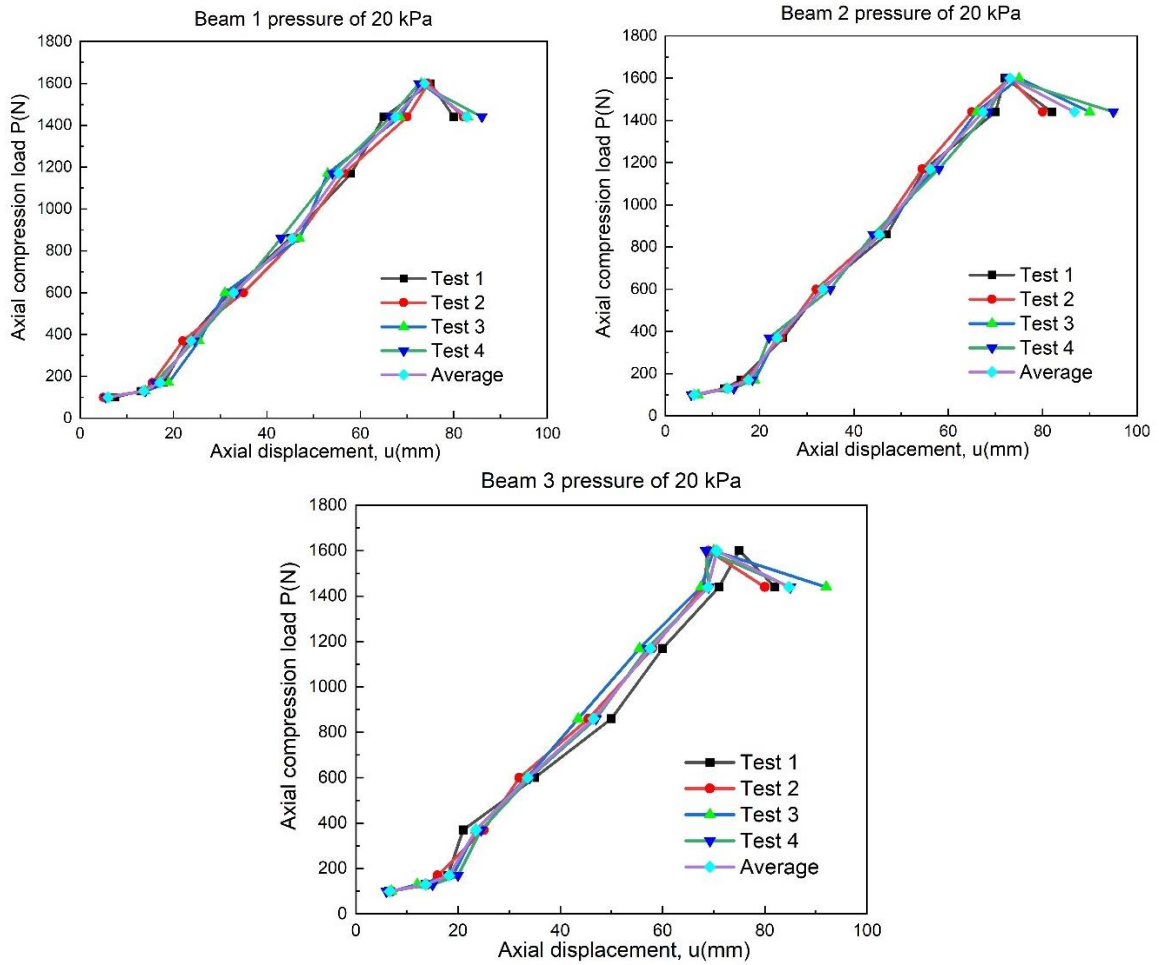
- 1) Gia tải dầm cho đến khi các nếp gấp đầu tiên xuất hiện, sau đó gỡ tải.
- 2) Gia tải dỡ tải cho dầm cho đến khi hiện tượng mất ổn định đầu tiên xảy ra nhiều lần.
- 3) Gia tải dầm cho đến khi dầm sụp đổ hoàn toàn.

5.5.1 Quan hệ tải trọng và chuyển vị u của dầm ở áp suất

5.5.1.1 Quan hệ tải trọng và chuyển vị của dầm ở áp suất 20 kPa và 80 kPa

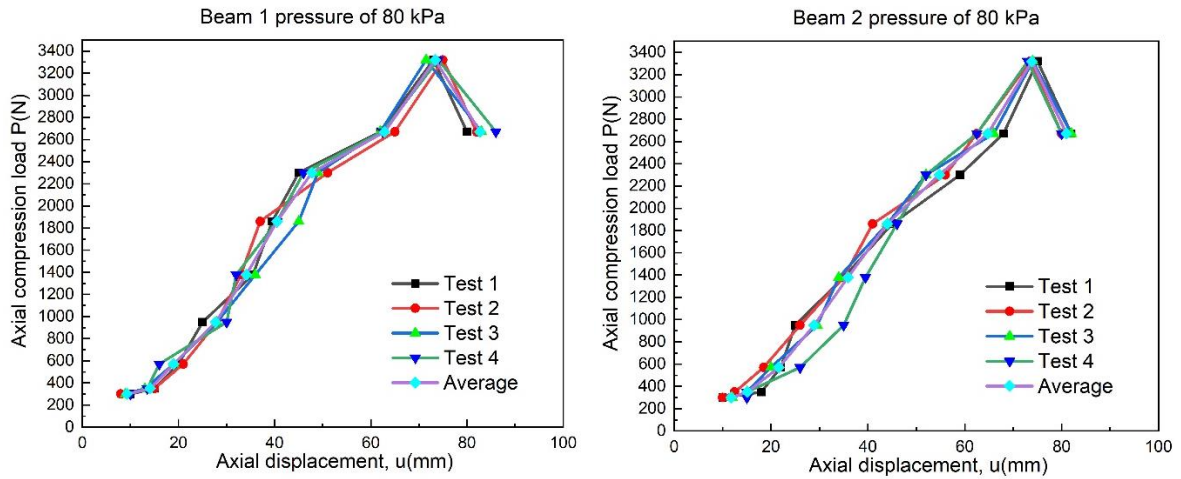
Kết quả thí nghiệm xác định mối quan hệ chuyển vị và tải trọng của dầm bơm hơi với áp suất không khí 20 kPa và 80 kPa được minh họa trong **Hình 5.8** và **Hình 5.9**. Có thể thấy rằng độ lệch lớn nhất khoảng 4,7% xảy ra ngay khi xuất hiện nếp gấp. Độ lệch nhỏ như vậy cho thấy một phương pháp đo đạc tốt được tiến hành. Ngoài ra, có thể thấy rằng sự chuyển vị dọc trục tăng tuyến tính với lực nén và độ cứng của dầm tăng lên khi tăng áp suất bơm tăng. Nếp gấp đầu tiên xuất hiện khi chuyển vị dọc trục khoảng 70 mm. Nếp gấp đầu tiên của dầm cho thấy sự mất ổn định của dầm, dẫn đến giảm đáng kể khả năng chịu tải của dầm bơm hơi. Nếp gấp xảy ra ở một vị trí tương tự trong các dầm khác, ví dụ như ở phần giữa. Điều này có thể được giải thích rằng áp suất không khí trong dầm làm tăng khả năng chịu tải của nó, nhưng áp suất không khí không ảnh hưởng đến dạng mất ổn định của dầm.

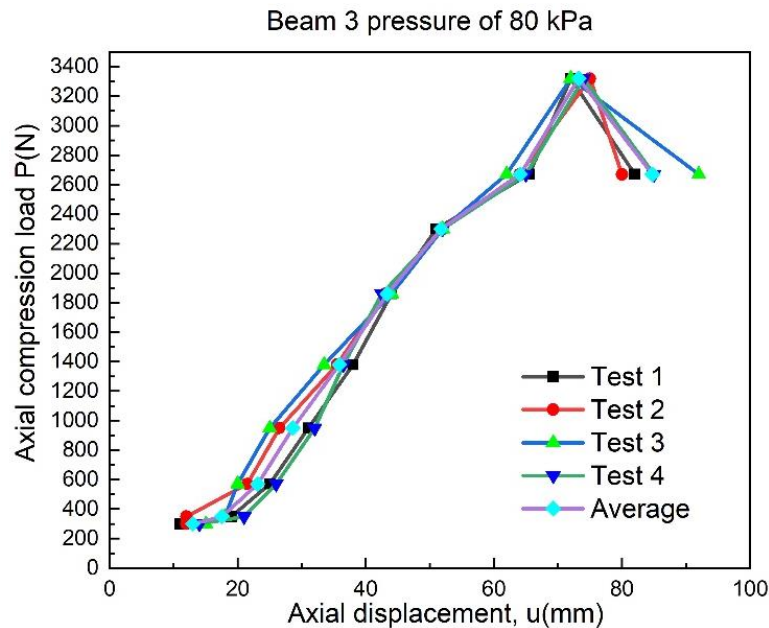
a) $p = 20 \text{ kPa}$



Hình 5.8 Tải trọng và chuyển vị của dầm ở áp suất $p = 20$ kPa

b) $p = 80$ kPa

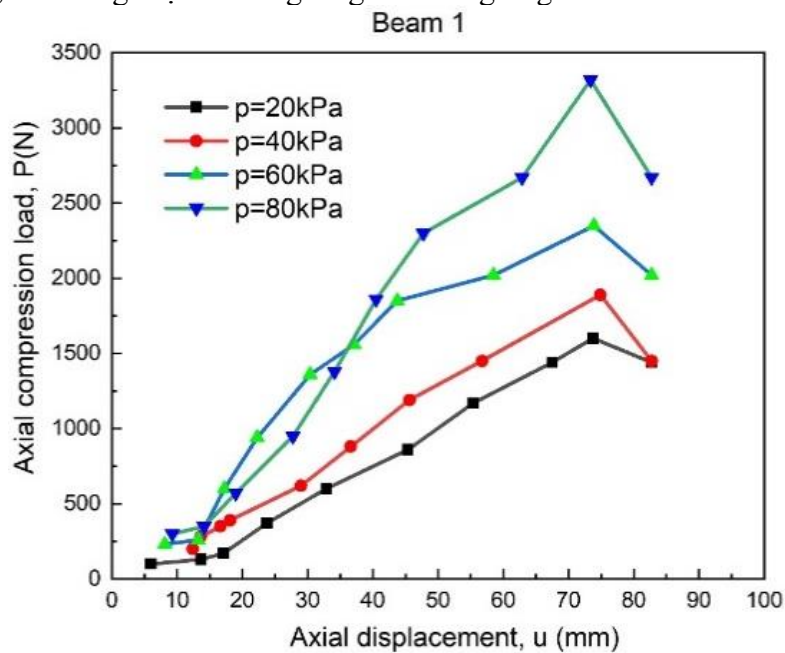




Hình 5.9 Tải trọng và chuyển vị của dầm ở áp suất $p = 80$ kPa

5.5.1.2 Dầm hơi với áp suất bơm khác nhau

Hình 5.10 cho thấy khả năng chịu lực của dầm phụ thuộc vào áp suất bơm vào dầm. Khi áp suất tăng lên, khả năng chịu tải cũng tăng lên tương ứng.

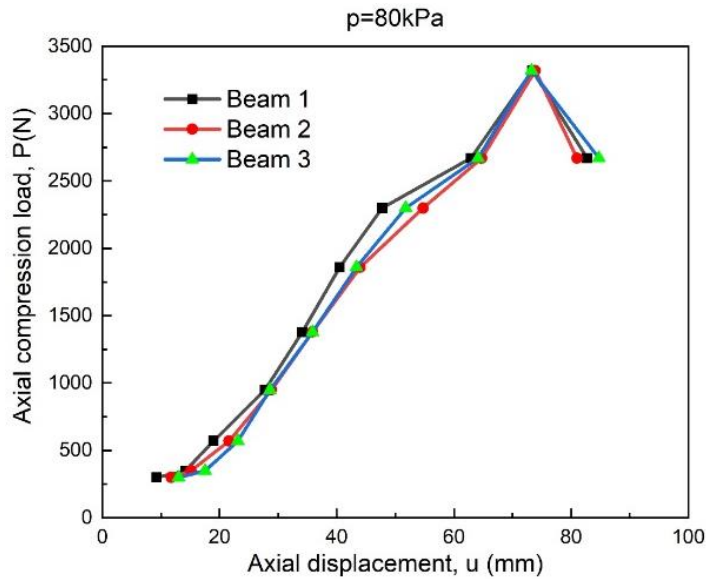


Hình 5.10 Quan hệ lực và chuyển vị của dầm ở các áp suất khác nhau

Theo kết quả thực nghiệm, khi khả năng chịu lực dọc trục của dầm cao hơn, giá trị áp suất bơm cũng đặc biệt tăng lên. Khi áp suất bơm đạt 80 kPa, khả năng chịu lực trung bình của ba dầm có thể đạt được giá trị tối đa 2342 kN. Độ lệch cao nhất của giá trị này trên các dầm so với giá trị trung bình là khoảng 5,85%. Kết quả này cho thấy tính đồng nhất của mẫu vật trong quá trình chế tạo. Các dầm được chế tạo bằng cách dán bằng phương pháp nhiệt cũng cho kết quả tương tự.

5.5.1.3 So sánh ứng xử của 3 dầm hơi ở áp suất $p = 80$ kPa

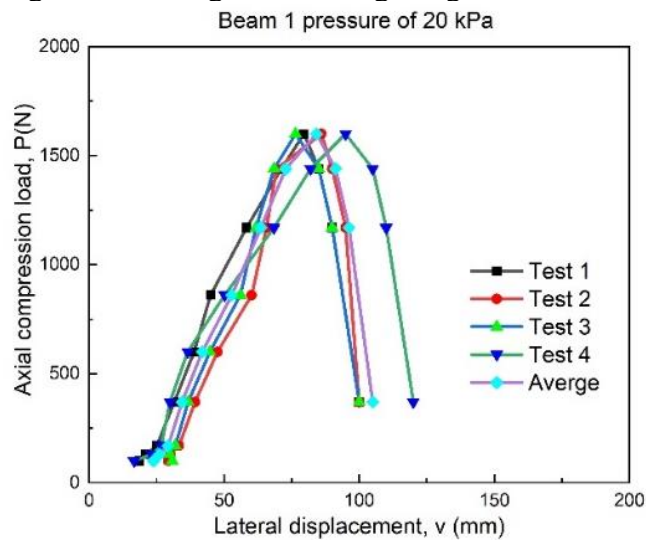
Hình 5.11 so sánh ứng xử mất ổn định của các dầm hơi với áp suất như nhau, điều này chứng tỏ rằng áp suất không khí ảnh hưởng lớn đến sự ổn định của dầm bơm hơi. Thí nghiệm cũng cho thấy khả năng chịu tải tối đa tương ứng với áp suất bơm.



Hình 5.11 So sánh 3 dầm ở áp suất $p = 80 \text{ kPa}$

5.5.2 Quan hệ tải trọng và chuyển vị quan hệ của dầm ở áp suất

Để đánh giá ảnh hưởng của mối quan hệ giữa tải trọng và chuyển vị của dầm ở áp suất thấp, mỗi dầm được kiểm tra tương ứng với giá trị áp suất bơm là 20 kPa . Thí nghiệm được thực hiện bốn lần. Kết quả thí nghiệm được trình bày trong **Hình 5.13**. Kết quả thí nghiệm cũng cho thấy khi áp suất tăng lên, khả năng chịu tải tăng đồng thời.



Hình 5.12 Quan hệ tải trọng và chuyển vị của các dầm ở áp suất $p = 20 \text{ kPa}$

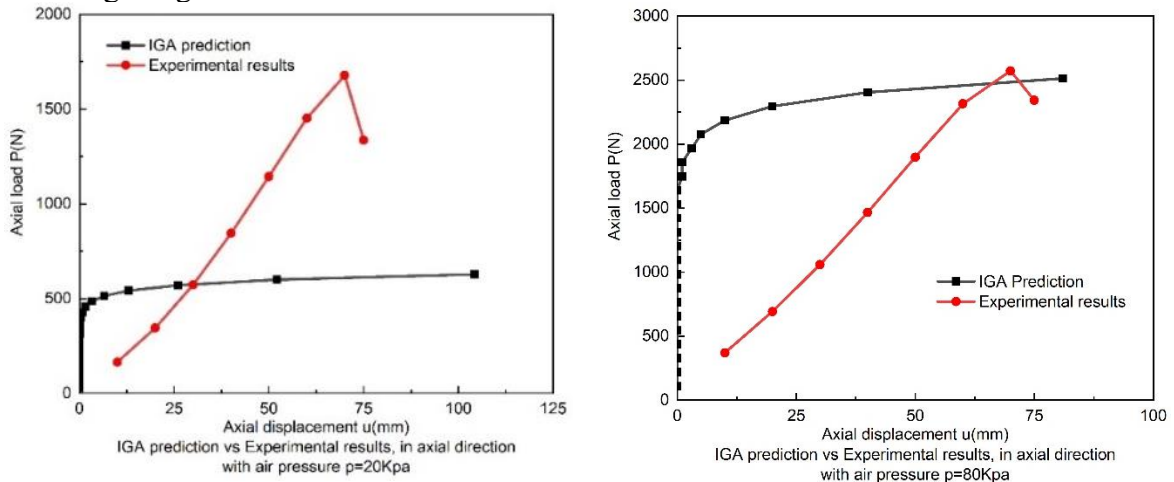
5.6 So sánh giữa các phương pháp số thử nghiệm và IGA

Hình 5.13 và **Hình 5.14** Error! Reference source not found. so sánh kết quả thực nghiệm và kết quả số thu được từ IGA. Nhìn chung, có thể thấy rằng kết quả thu được từ các thí nghiệm và kết quả từ IGA có phần giống nhau trong ứng xử kết cấu của dầm hơi khi chịu lực nén đúng tâm. Đối với các dầm có áp suất bơm thấp, có thể thấy rằng kết quả thực nghiệm và kết quả mô hình hóa không có sự tương đồng tốt. Tuy nhiên, nếu áp suất trong dầm tăng lên, dự đoán của mô hình IGA trở nên gần với kết quả thực nghiệm. Hiện tượng này có thể được giải thích như sau:

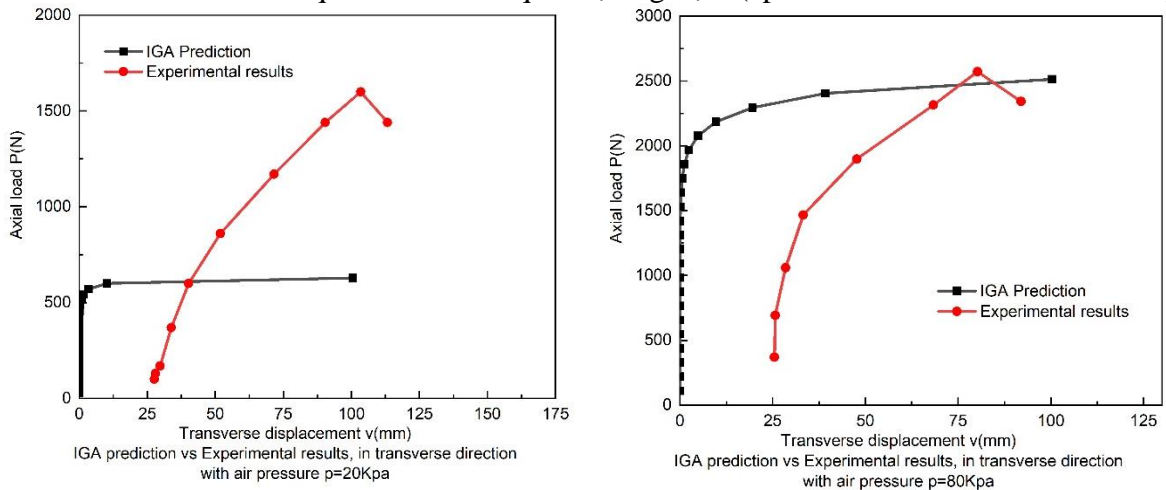
- Trong quá trình thực nghiệm, trong khi các dầm được bơm hơi và tiến hành các thí nghiệm ở áp suất thấp, dầm không đủ căng để nó có thể giữ cho dầm vững chắc tại thời điểm gia tải.

- Sự thay đổi hình dạng dầm theo phương "u" làm cho bán kính dầm tăng lên. Kết quả có thể thấy là trong các giai đoạn đầu của các thí nghiệm, các cảm biến thường nhận kết quả sớm

hơn. Tuy nhiên, khi tăng áp suất bơm trong dầm, có thể thấy rằng kết quả số và thực nghiệm khá tương đồng nhau.



Hình 5.13 So sánh kết quả IGA và kết quả thực nghiệm (áp suất bơm là 20 kPa và 80 kPa)



Hình 5.14 So sánh kết quả IGA với kết quả thực nghiệm (với áp suất bơm là 20 kPa và 80 kPa)

Sự khác biệt giữa kết quả thực nghiệm và kết quả số cho dầm có áp suất bơm thấp có thể được giải thích do một số khía cạnh, được tóm tắt như sau:

- Sự thiếu hụt thông tin vật liệu thực tế và sai sót trong quá trình ghi nhận kết quả có thể gây ra những sai sót đáng kể trong kết quả thực nghiệm.
- Kết quả mô phỏng số không tính đến sự phá hoại của vật liệu, đó có thể là lý do chính trong trường hợp áp suất bơm thấp.
- Các mô hình vật liệu được sử dụng trong cách tiếp cận số có thể không phù hợp với việc sử dụng vật liệu vải composite, điều này cần được phân tích toàn diện hơn nữa.

CHƯƠNG 6: KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, một mô hình số dựa trên phương pháp đẳng hình học IGA và một chương trình thực nghiệm đã được xây dựng để phân tích ứng xử mất ổn định của dầm hơi làm từ vật liệu composite.

Việc mô số được thực hiện dựa trên phương pháp IGA, trong đó mô hình dầm được phát triển dựa trên lý thuyết dầm của Timoshenko. Các phương trình cân bằng được xây dựng dựa trên phương pháp Lagrange tổng, trong đó ứng suất màng và ứng suất uốn được xem xét đồng

thời. Các hàm cơ sở NURBS của phương pháp IGA được sử dụng để rời rạc các phương trình vi phân cân bằng và xây dựng các phương trình dạng yếu. Phân tích mất ổn định tuyến tính và mất ổn định phi tuyến đều được thực hiện. Trong phân tích mất ổn định phi tuyến, thuật toán Newton-Raphson được áp dụng để tìm ra các quan hệ lực và chuyển vị. Bài toán xác thực và các nghiên cứu tham số khác cũng được tiến hành để cho thấy độ tin cậy của phương pháp và nghiên cứu ảnh hưởng của áp suất bơm đến ứng xử của dầm.

Trong nghiên cứu thực nghiệm, các tính chất cơ học của vật liệu vải composite được đo đạc. Sau đó, các thí nghiệm mất ổn định được thực hiện để nghiên cứu ứng xử của dầm hơi dầm với các áp suất bơm khác nhau. Kết quả thực nghiệm cũng được so sánh với những kết quả được từ phương pháp mô phỏng số.

Một số kết luận chính rút ra từ nghiên cứu này có thể được tóm tắt như sau:

- Một cách tiếp cận số dựa trên IGA đã được phát triển thành công để phân tích sự ổn định của dầm hơi chịu nén đúng tâm.
- Kết quả thu được từ phương pháp IGA là phù hợp với kết quả từ FEM truyền thống. Ngoài ra, phương pháp tiếp cận dựa trên IGA có tỷ lệ hội tụ tốt hơn FEM.
- Từ mô hình số và kết quả thực nghiệm, có thể thấy rằng khả năng chịu lực của dầm bơm hơi tăng theo áp suất bên trong.
- Các dự đoán thu được từ mô hình số dựa trên IGA cho thấy độ tin cậy cao trong trường hợp áp suất bơm tương đối lớn, đối với các trường hợp có áp suất bơm thấp, kết quả từ mô hình số cho xu hướng dự đoán tương tự với kết quả thí nghiệm, nhưng cường độ dự đoán nhỏ hơn so với kết quả thực nghiệm.

Danh sách các công bố

Các phần của luận án này đã được công bố trên các tạp chí quốc tế, tạp chí quốc gia hoặc được trình bày trong các hội nghị. Các giấy tờ này là:

- **Bài viết trên tạp chí khoa học quốc tế**

1. T. Le-Manh, Q. Huynh-Van, **Thu D. Phan**, Huan D. Phan, H. Nguyen-Xuan "Isogeometric nonlinear bending and buckling analysis of variable thickness composite plate structures ". *Composite Structures* 1 January 2017, Pages 818-826.

- **Hội nghị quốc tế**

2. **Phan Thị Đăng Thu**, Phan Đình Huân và Nguyễn Thanh Trương "Effect parametric to properties of a 2D orthogonal plain classical woven fabric composite". *Hội nghị quốc tế về Cơ khí và Tự động hóa Kỹ thuật (ICEMA)*, thành phố Hà Nội 2014- ISBN: 978-604-913-367-1, trang 509-517.

- **Hội nghị quốc gia**

3. **Phan Thị Đăng Thu**, Phan Đình Huân và Nguyễn Thanh Trương "Biaxial beam inflation test on orthotropic fabric beam"; *Hội nghị toàn quốc về cơ khí rắn*, thành phố Hồ Chí Minh 2013 - ISBN: 978-604-913-213-1, trang 1169-1176.

4. Nguyễn Thanh Trương, Phan Đình Huân, **Phan Thị Đăng Thu** "Discretizing an analytical inflatable beam model by the shell membrane finite element". *Hội nghị toàn quốc về cơ khí rắn*, thành phố Hồ Chí Minh 2013 - ISBN: 978-604-913-213-1, trang 1221-1228.

5. **Phan Thị Đăng Thu**, Lê Mạnh Tuấn, Nguyễn Xuân Hùng, Nguyễn Thành Trương "Geometrically nonlinear behaviour of composite beams of variable fiber volume fraction in isogeometric analysis". *Hội nghị toàn quốc về cơ khí rắn*, thành phố Đà Nẵng 2015 - ISBN: 978-604-82-2028-0, Trang: 1404-1409.

6. **Phan Thị Đăng Thu**, Lê Mạnh Tuấn, Lê Hiếu Giang, Nguyễn Thanh Trương "Buckling of cylindrical inflatable composite beams using isogeometric analysis". *Kỷ yếu Hội nghị khoa học và công nghệ quốc gia về cơ khí IV*, Thành phố Hồ Chí Minh 2015, Việt Nam - ISBN: 978-604-73-3691-3, Trang 821-826.

7. **Phan Thị Đăng Thu**, Nguyễn Thành Trương, Phan Đình Huân "Mô hình dầm dầm hơi composite phi tuyến uốn uốn". *Hội thảo khoa học quốc gia về vật liệu tổng hợp và kết cấu*, thành phố Nha Trang 2016 - ISBN: 976-604-82-2026-6, Trang 699-706.

8. **Phan Thị Đăng Thu**, Nguyễn Thành Trương, Phan Đình Huân, Lê Đình Tuân "Biaxial experiments for determining material properties and joint strength of textile plain woven fabric composites". *Hội nghị toàn quốc về cơ khí rắn*, thành phố Hà Nội 2017 - ISBN: 978-604-913-722-8, trang 1174-11.

**MINISTRY OF EDUCATION AND TRAINING
HCM CITY UNIVERSITY OF TECHNOLOGY AND EDUCATION**

---0000---

PHAN THI DANG THU

BUCKLING ANALYSIS OF INFLATABLE COMPOSITE BEAMS

PHD THESIS SUMMARY

MAJOR: MECHANICAL ENGINEERING

CODE: 9520103

Ho Chi Minh City, August 2021

ABSTRACT

This thesis presents a numerical modeling and an experimental program approach to investigate the buckling behavior of inflatable beams made from woven fabric composite materials.

In the numerical study, the Isogeometric Analysis (IGA) is utilized to analyze the buckling response of inflatable beams subject to axial compressive load and predict the critical load at which the first wrinkle occurs. In the numerical model, the Timoshenko's kinematics principle is used to build a 3D model of inflating orthotropic beams. In this modeling process, geometrical non-linearity is considered by using the energy concept that accounts for the change in membrane and strain energies when the beams are bent. By using Lagrangian and virtual work principles, nonlinear equilibrium equations were derived. These equations are then discretized by using NURBS basis functions inherited from IGA approach to derive the global nonlinear equation. The well-known Newton-Raphson algorithm is then used to solve the nonlinear equation. The numerical results are then calibrated with the experimental one. It was found that a good agreement between IGA predictions and test results is achieved. The numerical model could be used for other parametric studies to investigate the influences of material and geometrical parameters on the buckling behaviour of inflatable beams.

In the experiment study, the mechanical properties of the woven fabric composite material used in fabrication of inflatable beams are determined and the biaxial buckling test is carried out. The experimental studies are performed under various inflation pressures to characterize the orthotropic mechanical properties and the nonlinear buckling behaviors. Load versus deflection curve of inflating beams with different air pressures obtained from the experiments are illustrated, and the first wrinkles of the beams when buckling happens is also monitored. Therefore, the maximum load carrying capacity of the inflating beam with respect to the appearance of the first wrinkle is totally found. In addition, the critical buckling load is determined through distinct load cases. Then, the discrepancy is evaluated among the proposed orthotropic and isotropic models in literature.

CHAPTER 1: INTRODUCTION

1.1 Background information

The inflating structures are common structures which are currently used in amusing and performing projects, such as buoy houses in children's play areas, welcome gate, animals images, etc. In Vietnam, the inflating structures are a relatively new field. In general, designing and analyzing of the inflating structures for large projects have been facing difficult challenges. This is due to the fact that the structural responses of inflating structures considerably depends on the infilled air and material of the skin. In addition, there is a shortage in the experimental studies of inflating structures. Some researchers have studied the applications of inflating structures for practical purposes based on analytical and numerical modeling approaches. However, the use of analytical approach or traditional finite element method still has their own limits.

1.2 Motivation of the thesis

As the use of woven fabric composite materials have become more popular nowadays, the need for investigating their applications in inflating structures becomes crucial. Therefore, this study is devoted to find out the structural performance of woven fabric beams under compressive loads in both experimental and numerical modelling approaches. In addition, the application of IGA technique to investigate the stability behaviour of inflating structures has not been conducted elsewhere before, therefore a new numerical approach based on IGA is worthily conducted.

1.3 The objectives and scope of the study

The main objectives of this study is to investigate the critical loads of inflating beam made from composite textiles in both experimental and numerical modeling approaches. There for the goals of this study could be summarized as follows

- 1) Develop an experimental program to investigate the buckling phenomena of inflatable beam structure.
- 2) Apply the "Isogeometric Analysis - IGA" technique develop a numerical program to determine the critical load for the composite woven fabric's inflating beam with different boundary conditions.
- 3) Compare the experimental results and those obtained from the numerical approach to validate the accuracy of the developed program.

1.4 Methodology

In order achieve the study scopes, this thesis have used several methods as follows:

- Studying literature review related to the subjects of textile composite materials and inflating structures.
- Refer, study and synthesize critical load calculation models for inflatable beam structures of composite textiles to choose a suitable model for analytical equations and finite element calculation models.
- Derive theories for nonlinear buckling analysis of inflating composite structures under the IGA framework and investigate numerical models.

1.5 Outline of the thesis

The contents of this thesis are briefly organized as follows:

- Chapter 1 discusses a general introduction to background information.
- Chapter 2 gives a brief review of fibrous composite materials and their applications.
- Chapter 3 is presented to discuss about basic features of IGA and theoretical development of stability governing equations of buckling problems. The remaining part of this chapter is about the theoretical development of stability governing equations of the buckling problem.

- Chapter 4 is devoted to the developments of the IGA-based numerical model.
- Chapter 5 presents materials selection, prototyping plan, besides also checks buckling, the relationship between load and curve by varying pressure, etc. An experimental program for buckling behavior of inflating beams fabricated from woven fabric composites is presented.
- Chapter 6 addresses and summaries on research contributions and achievements of this work is presented. Important conclusions and findings are also drawn in this chapter.

CHAPTER 2: LITERATURE REVIEW

2.1 Analytical approach

The studies on behaviour of inflating structures have been widely conducted by various researchers by using the analytical approach. Some authors have also applied Euler Bernoulli's kinematics to modelling the inflating beams. For example, load deflection theory was derived Comer, R. L., & Levy, S. for an inflating isotropic beam. After that, Comer and Levy's work was extended by Webber, J.P.H. to predict destructing loads in cantilever beams that was inflating. Also, Main et al. did experiments on a cantilever isotropic beam and then Comer's theory was improved typically. Continuously, Suhey et al. considered a tube pressurized under uniformly distributed loads. By the means of the Euler-Bernoulli's kinematics, material of beams was supposed to be isotropic and their results was obtained theoretically for deflection. The Timoshenko's kinematics is determined by some other authors have that it is the best adapted theory for structures as pressure load does not appear in solution of deflection, which is mentioned in the Euler Bernoulli's kinematics situation. For instance, a series of nonlinear equations was derived by Fichter for the bending and twisting of inflating cylindrical beams. This derivation was based on three following significant assumptions: cross section of the inflating beam, which is the first issue, remains undeformed under the applied loading; secondly, the cross-sectional translation and rotations are small; and the negligible characteristic of circumferential strain is the third assumption. He used the Timoshenko kinematics and energy minimization approach.

A homogeneous isotropic fabric is supposed to apply on the beam. Later Topping, A.D. and Douglas, W.J. have investigated the structural stiffness of an inflating cylindrical cantilever beam that was influenced by large deformations. The finite theory of elasticity and the theory of small deformations have been employed to obtain explicit analytical results. Their analyses also account for the changes of geometry and material properties that occur during the inflation process. Wielgosz and Thomas have derived analytical solutions for inflating panels and tubes by using the Timoshenko kinematics and by writing the equilibrium equations in the deformed state of the isotropic beam in order to take into account the geometrical stiffness and the follower force effect due to the internal pressure. They have shown that the limit load is proportional to the applied pressure and that the deflections are inversely proportional to the material properties of the fabrics and to the applied pressure.

Wielgosz and Thomas and Thomas and Wielgosz have presented experimental, analytical and numerical results on the deflections of highly inflating fabric tubes submitted to bending loads. Experiments have been displayed and they have shown that the tube behaviour looks like that of inflating panels. Equilibrium equations have been once again written in the deformed state to take into account the geometrical stiffness and the follower forces. Comparisons between experimental and analytical results have proven the accuracy of their beam theory for solving problems on the deflections of highly inflating tubes. Le and Wielgosz have used the virtual work principle in Lagrangian form and the usual Saint Venant Kirchhoff hypothesis with finite displacements and rotations in order to derive the nonlinear

equations for inflating isotropic beams. The nonlinear equilibrium equations have been linearized around the pre-stressed reference configuration which has to be defined as opposed to the so-called natural state. These linearized equations have improved Fichter's theory.

Although a lot of research groups have made much efforts in developing the analytical methods over many years but almosts they have focused on isotropic fabric materials. Until now, there has a few work that focuses on the case of orthotropic fabric material.

2.2 Numerical approach

Nowadays, inflating beams pose significant challenges to the analysts, especially in cases where the analytical solutions are difficult to find in gernalized cases of loadings and boundary conditions. In the numerical modelling of inflating beams, significant prior researches have been conducted. Steeves has used the principle of minimum potential energy to derive a set of governing differential equations for lateral deformation of inflating beams. A simplifying approximation, assuming that the cross sections of the beam remain undeformed, has then been employed to reduce the dimensions to one dimension: This beam element has included a pressure stiffening term. Quigley et al. and Cavallaro et al. have used the finite element approach to predict the linear load-deformation response of inflating fabric beams. However, the pressure stiffening term in Steeves's element has treated the axial pressure resultant as an externally applied stiffening tension force. This formulation has predicted an unbounded increase in beam stiffness with increasing inflation pressure. Wielgosz and Thomas and Thomas and Wielgosz have studied the load-deflection behaviour of highly inflating fabric tubes and panels, and have developed a specialized beam finite elementingusing Timoshenko beam theory. In their approach, the force generated by the internal pressure has been treated as a follower force which has accounted for pressure stiffening effects. However, the element formulation did not consider the fabric wrinkling. Bouzidi et al. have presented theoretical and numerical developments of finite elements for azisymmetric and cylindrical bending problems of pressurized isotropic membranes. The external loading has been mainly a normal pressure to the membrane and the developments have been made under the assumptions of follower forces, large displacements and finite strains. The total potential energy has been minimized, and the numerical solution has been obtained by using an optimization algorithm. Suhey et al. have presented a numerical simulation and design of an inflating open-ocean-aquaculture cage using nonlinear finite elementinganalysis of isotropic membrane structures. Numerical instability caused by the tension-only membrane has been removed by adding an artificial shell with small stiffness. The finite elementing model has been compared with a modified beam theory for the inflating structure. A good agreement has been observed between the numerical and theoretical results. Le and Wielgosz have discretized the nonlinear equations obtained in Le and Wielgosz to carry out a finite element formulation for linearized problems of highly inflating isotropic fabric beams. Their numerical results obtained with the beam element have been shown to be close to their 3D isotropic fabric membrane finite elementingand analytical results obtained in Le and Wielgosz. Davids and Davids and Zhang have derived a Timoshenko beam finite elementingfor nonlinear load-deflection analysis of pressurized isotropic fabric beams and the numerical examination of the effect of pressure on the beam loaddeflection behaviour. The basis of their element formulation has been an incremental virtual work epression that has included explicitly the work done by the pressure. Parametric studies have been also investigated to demonstrate the importance of including the work done by the pressure in their models. More recently, Malm et al. have used 3D isotropic fabric membrane finite elementing model to predict the beam load-deformation response. Comparison between the finite elementing model load-deflection responss and beam theory has shown the accuracy of the conventional beam theory for modelling the isotropic fabric airbeam. Most of the former works, the fabric was always supposed to be isotropic. Considering the inflating beams made

of orthotropic fabric materials, several research groups have been conducted, Plaut et al. have studied the effect of the snow and wind loads on an inflating arch in the assumption of linear thin-shell theory of Sanders. They have used this theory to formulate the governing equations, which include the effect of the initial membrane stresses. The material was assumed to have a linearly elastic, nonhomogeneous and orthotropic behaviour. Approximate solutions have been obtained using the Rayleigh-Ritz method. Plagianakos et al. have studied a low pressure Tensairity in order to estimate its potential towards applications including axial compressive loads. Compression experiments have been conducted on a simply-supported spindle-shaped Tensairity column and displacements have been measured in several positions along the span, whereas axial forces have been experimentally determined by strain gauges measurements. Comparisons has been made between experimental results, finite elementing and analytical predictions they have already developed, and a good agreement has been found. Moreover, Nguyen et al. studied an analytical approach to approximate the critical load for an HOWF 3D Timoshenko. Regarding the buckling behavior, the model of proposed inflatable beam proved a prosperity adjustment with the previous models in literature. The total Lagrangian form of Timoshenko kinematics and virtual work principles were applied to formulate the beam's governing equations.

Overall, it is seen that a great number of studies have been conducted recently to development of numerical model to the inflating beam structures, however, the study on the influence of orthotropic fabric on the structural behaviour has not been handled yet. Moreover, all previous studies only developed based on traditional finite element approach.

CHAPTER 3: THEORETICAL FORMULATIONS

3.1 Overview and basics of Isogeometric Analysis

An overview of NURBS theory focusing on the mathematical description of free-form curves is reviewed in this chapter. Most of the basics of IGA and more details on NURBS-based modelling can be found in the books of Piegl. The term *isogeometric analysis* was proposed by T.J.R. Hughes and means that the analysis model uses the same mathematical description as the geometry model. It is an enhancement to isoparametric analysis. The core idea of isogeometric analysis is that the functions used for the geometry description in CAD are adopted by the analysis for the geometry and the solution field. By this, the whole process of meshing can be omitted and the two models for design and analysis merge into one.

3.2 Continuum-based governing equations of stability problems of inflating beams

3.2.1 Mathematical description of inflating beams

In this study, we focused our work on the Timoshenko beams made from orthotropic material. For inflating structures, the load is applied in two stages: First, the beam is inflating to the pressure p , and other external forces are applied. At the beginning of the first step, the internal pressure is zero and the beam is in its natural state **Figure 3.1a**. The reference configuration corresponds to the end of the first stage **Figure 3.1b**. The Green-Lagrange strain measure is used due to the geometrical nonlinearities.

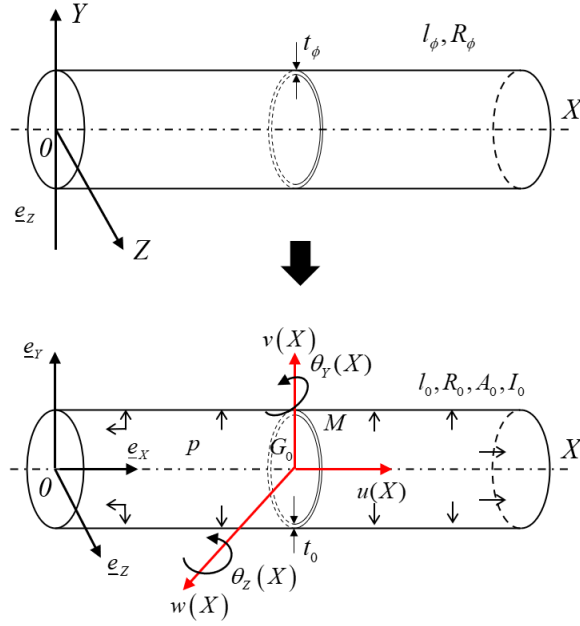


Figure 3.1 HOWF inflating beam: (a) in natural state and (b) in the reference configuration (inflating state)

Figure 3.1 shows an inflating cylindrical beam made of an HOWF. $l_\phi, R_\phi, t_\phi, A_0$ and I_0 represent respectively the length, the external radius, the fabric thickness, the cross-section and the second moment of inertia around the principal axes of inertia Y and Z of the beam in the reference configuration which is the inflating configuration. A_0 and I_0 are given by

$$A_0 = 2\pi R_0 t_0 \quad 3.1$$

$$I_0 = \frac{A_0 R_0^2}{2} \quad 3.2$$

where the reference dimensions l_0, R_0 and t_0 depend on the inflation pressure and the mechanical properties of the fabric Apedo (2009):

$$l_0 = l_\phi + \frac{p R_\phi l_\phi}{2 E_t t_\phi} (1 - 2\nu_{lt}) \quad 3.3$$

$$R_0 = R_\phi + \frac{p R_\phi^2}{2 E_t t_\phi} (2 - \nu_{lt}) \quad 3.4$$

$$t_0 = t_\phi + \frac{3 p R_\phi}{2 E_t} \nu_{lt} \quad 3.5$$

in which l_ϕ, R_ϕ and t_ϕ are respectively the length, the fabric thickness, and the external radius of the beam in the natural state.

The internal pressure p is assumed to remain constant, which simplifies the analysis and is consistent with the experimental observations and the prior studies on inflating fabric beams and arches. The initial pressurization takes place prior to the application of concentrated and distributed external loads, and is not included in the structural analysis per se.

The slenderness ratio is $\lambda_s = \frac{L}{\rho}$ where $L = \mu l_0$ is the beam length and $\rho = \sqrt{\frac{I_0}{A_0}}$ is

the beam radius of gyration. The coefficient μ takes different values according to the boundary conditions of the beam.

M is a point on the current cross-section and G_0 the centroid of the current cross-section lies on the X - axis. The beam is undergoing axial loading. Two Fichter's simplifying assumptions are applied in the following:

- The cross-section of the inflating beam under consideration is assumed to be circular and maintains its shape after deformation, so that there are no distortion and local buckling;

- The rotations around the principal inertia axes of the beam are small and the rotation around the beam axis is negligible.

3.2.2 Theoretical formulation

3.2.2.1 Kinematic relations

The material is assumed orthotropic and the warp direction of the fabric is assumed to coincide with the beam axis; thus the weft yarn is circumferential. The model can be adapted to the case where the axes are in other directions. In this case, an additional rotation may be operated to relate the orthotropic directions and the beam axes. This general case is not addressed here because, for an industrial purpose, the orthotropic principal directions coincide with the longitudinal and circumferential directions of the cylinder. With the hypotheses proposed by Fichter were applied, the displacement components of an arbitrary point $M(X, Y, Z)$ on the beam are:

$$\underline{\mathbf{u}}(M) = \begin{Bmatrix} \underline{u}_X \\ \underline{u}_Y \\ \underline{u}_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(X) \\ v(X) \\ w(X) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Z\theta_Y(X) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Y\theta_Z(X) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 3.6$$

Where $\underline{u}_X, \underline{u}_Y$ and \underline{u}_Z are the components of the displacement at the arbitrary point M , whilst $u(X), v(X)$ and $w(X)$ correspond to the displacements of the centroid G_0 of the current cross-section at abscissa X , related to the base (X, Y, Z) ; $\theta_Y(X)$ and $\theta_Z(X)$ are the rotations of the current section at abscissa X around both principal axes of inertia of the beam, respectively. Let $\delta \underline{\mathbf{u}}$ denote an arbitrary virtual displacement from the current position of the material point M :

$$\delta \underline{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \delta u(X) \\ \delta v(X) \\ \delta w(X) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Z\delta\theta_Y(X) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -Y\delta\theta_Z(X) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad 3.7$$

The definition of the strain at an arbitrary point as a function of the displacements is:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}} = \underline{\underline{\mathbf{E}}}_l + \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{nl} \quad 3.8$$

where $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_l$ and $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{nl}$ are respectively the Green-Lagrange linear and nonlinear strains. The nonlinear term $\underline{\underline{\mathbf{E}}}_{nl}$ takes into account the geometrical nonlinearities. The strain fields depend on the displacement fields as following:

$$\underline{\underline{\mathbf{E}}}_l = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} \\ \frac{\partial u_y}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial Z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial Y} + \frac{\partial u_y}{\partial X} \\ \frac{\partial u_x}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial X} \\ \frac{\partial u_y}{\partial Z} + \frac{\partial u_z}{\partial Y} \end{Bmatrix}, \underline{\underline{\mathbf{E}}}_{nl} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,X}^T \underline{\mathbf{u}}_{,X} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,Y}^T \underline{\mathbf{u}}_{,Y} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,Z}^T \underline{\mathbf{u}}_{,Z} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,X}^T \underline{\mathbf{u}}_{,Y} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,Y}^T \underline{\mathbf{u}}_{,X} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,X}^T \underline{\mathbf{u}}_{,Z} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,Z}^T \underline{\mathbf{u}}_{,X} \\ \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,Y}^T \underline{\mathbf{u}}_{,Z} + \frac{1}{2} \underline{\mathbf{u}}_{,Z}^T \underline{\mathbf{u}}_{,Y} \end{Bmatrix} \quad 3.9$$

The higher-order nonlinear terms are the product of the vectors that are defined as follows

$$\underline{\mathbf{u}}_{,X} = \begin{Bmatrix} u_{X,X} \\ u_{Y,X} \\ u_{Z,X} \end{Bmatrix}, \underline{\mathbf{u}}_{,Y} = \begin{Bmatrix} u_{X,Y} \\ u_{Y,Y} \\ u_{Z,Y} \end{Bmatrix}, \underline{\mathbf{u}}_{,Z} = \begin{Bmatrix} u_{X,Z} \\ u_{Y,Z} \\ u_{Z,Z} \end{Bmatrix} \quad 3.10$$

3.2.2.2 Constitutive equations

The Saint Venant-Kirchhoff orthotropic material is used in recent work. The energy function $\Phi_E = \Phi(\underline{\underline{\mathbf{E}}})$ related to this case is known as the Helmholtz free-energy function. To describe the behavior of the inflating beam, we define two coordinate systems: A local warp and weft direction coordinate system related to each point of the membrane coincident with the principal directions of the fabric **Figure 3.2a**. And the other is the Cartesian coordinate system attached to the beam **Figure 3.2b**. The components of the second Piola-Kirchhoff tensor $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$ are given by the nonlinear Hookean stress-strain relationships

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^o + \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\underline{\mathbf{E}}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}}^o + \underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\underline{\mathbf{E}}} \quad 3.11$$

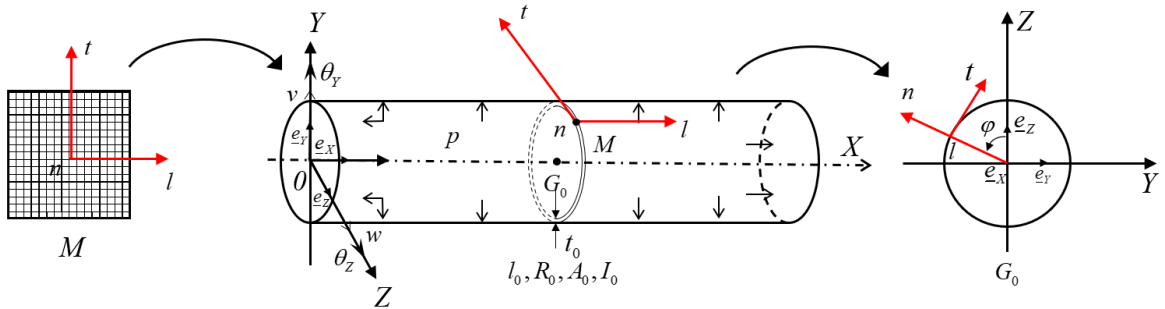


Figure 3.2 (a) Fabric local coordinate system, (b) Beam Cartesian coordinate system

where $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^o$ is the inflation pressure prestressing tensor.

where

- $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^o$ is the inflation pressure prestressing tensor.
- the second Piola-Kirchhoff tensor is written in the beam coordinate system as

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} & S_{XZ} \\ & S_{YY} & S_{YZ} \\ \text{symmetrical} & & S_{ZZ} \end{bmatrix} \quad 3.12$$

- $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ is the fourth-order elasticity tensor expressed in the beam axes.

In general, the inflation pressure prestressing tensor is assumed spheric and isotropic Wielgosz. So,

$$\underline{\underline{\mathbf{S}}}^o = S^o \underline{\underline{\mathbf{I}}} \quad 3.13$$

Where $\underline{\underline{\mathbf{I}}}$ is the identity second order tensor and $S^o = \frac{N_o}{A_o}$ is the prestressing scalar.

The elasticity tensor expressed in the beam axes can be calculated from the local orthotropic elasticity tensor using the rotation matrix $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ (see Apedo):

$$C_{ijkl} = R_{im} R_{jn} R_{kp} R_{lq} C_{mnpq}^{loc} \quad 3.14$$

With $i, j, k, m, n, p, q = 1, \dots, 3$, where

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad 3.15$$

and

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}}^{loc} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad 3.16$$

The elasticity tensor in the beam axes then obtained as

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & c^2 C_{12} & s^2 C_{12} & cs C_{12} & 0 & 0 \\ & c^4 C_{22} & c^2 s^2 C_{22} & c^3 s C_{22} & 0 & 0 \\ & & s^4 C_{22} & cs^3 C_{22} & 0 & 0 \\ & & & c^2 s^2 C_{22} & 0 & 0 \\ & & & & s^2 C_{66} & cs C_{66} \\ \text{symmetrical} & & & & & c^2 C_{66} \end{bmatrix} \quad 3.17$$

Where $c = \cos \varphi$ and $s = \sin \varphi$ with $\varphi = (e_z, n)$ being the angle between the Z -axis and the normal of the membrane. The components of the elasticity tensor are given by

$$C_{11} = \frac{E_t}{1 - \nu_{lt} \nu_{tl}}; C_{12} = \frac{E_t \nu_{tl}}{1 - \nu_{lt} \nu_{tl}};$$

$$C_{22} = \frac{E_t}{1 - \nu_{lt} \nu_{tl}}; C_{66} = G_{lt} \quad \text{and} \quad \frac{E_t}{\nu_{lt}} = \frac{E_t}{\nu_{tl}}$$

3.2.3 Virtual work principle

The balance equations of an inflating beam come from the virtual work principle (VWP). The VWP applied to the beam in its pressurized state is

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}}^d + \delta W_{\text{ext}}^p, \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \quad 3.18$$

$$\Leftrightarrow \int_{V_o} \underline{\mathbf{S}} : \delta \underline{\mathbf{E}} dV_o = \int_{V_o} \mathbf{f} \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} dV_o + \{R \cdot \delta \underline{\mathbf{u}}\} + \int_{\partial V_o} \mathbf{t} \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} dA, \forall \delta \underline{\mathbf{u}} \quad 3.19$$

where \mathbf{f} and \mathbf{t} are the body forces per unit volume and the traction forces per the left-hand-side of **Eq. 3.18** is formulated from the second Piola-Kirchhoff tensor $\underline{\mathbf{S}}$ and the virtual Green strain $\delta \underline{\mathbf{E}}$.

The virtual Green strain tensor is written in the beam coordinate system as

$$\delta \underline{\mathbf{E}} = \delta \underline{\mathbf{E}}_l + \delta \underline{\mathbf{E}}_{nl} \quad 3.20$$

where

$$\delta \underline{\mathbf{E}}_l = \begin{bmatrix} \delta E_{XX}^l & \delta E_{YY}^l & \delta E_{ZZ}^l & \delta E_{YZ}^l & \delta E_{ZX}^l & \delta E_{XY}^l \end{bmatrix}^T \quad 3.21$$

$$\delta \underline{\mathbf{E}}_{nl} = \begin{bmatrix} \delta E_{XX}^{nl} & \delta E_{YY}^{nl} & \delta E_{ZZ}^{nl} & \delta E_{YZ}^{nl} & \delta E_{ZX}^{nl} & \delta E_{XY}^{nl} \end{bmatrix}^T \quad 3.22$$

with

$$\begin{aligned} \delta E_{XX}^l &= \delta u_{,X} + Z \delta \theta_{Y,X} - Y \delta \theta_{Z,X} \\ \delta E_{YY}^l &= 0 \\ \delta E_{ZZ}^l &= 0 \\ \delta E_{YZ}^l &= 0 \\ \delta E_{XZ}^l &= \delta w_{,X} + \delta \theta_{Y,X} \\ \delta E_{XY}^l &= \delta v_{,X} - \delta \theta_Z \end{aligned} \quad 3.23$$

and

$$\begin{aligned} \delta E_{XX}^{nl} &= (u_{,X} + Z \theta_{Y,X} - Y \theta_{Z,X}) \delta u_{,X} + v_{,X} \delta v_{,X} \\ &\quad + w_{,X} \delta w_{,X} + Z (u_{,X} + Z \theta_{Y,X} - Y \theta_{Z,X}) \delta \theta_{Y,X} \\ &\quad - Y (u_{,X} + Z \theta_{Y,X} - Y \theta_{Z,X}) \delta \theta_{Z,X} \\ \delta E_{YY}^{nl} &= \theta_Z \delta \theta_Z \\ \delta E_{ZZ}^{nl} &= \theta_Y \delta \theta_Y \\ \delta E_{YZ}^{nl} &= (\theta_Z \delta \theta_Y + \theta_Y \delta \theta_Z) \\ \delta E_{XZ}^{nl} &= \theta_Y \delta u_{,X} + (u_{,X} + Z \theta_{Y,X} - Y \theta_{Z,X}) \delta \theta_Y \\ &\quad + Z \theta_Y \delta \theta_{Y,X} - Y \theta_Y \delta \theta_{Z,X} \\ \delta E_{XY}^{nl} &= -\theta_Z \delta u_{,X} - Z \theta_Z \delta \theta_{Y,X} \\ &\quad - s (u_{,X} + Z \theta_{Y,X} - Y \theta_{Z,X}) \delta \theta_Z + Y \theta_Z \delta \theta_{Z,X} \end{aligned} \quad 3.24$$

The generalized resultant forces and moments, and the quantities Q_i ($i = 1, \dots, 10$) acting over the reference cross-section A_o can be related to the stresses in the beam by

$$\begin{Bmatrix} N \\ T_y \\ T_z \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{A_0} \begin{Bmatrix} S_{XX} \\ S_{XY} \\ S_{XZ} \\ ZS_{XX} \\ -YS_{XX} \end{Bmatrix} dA_0, \quad 3.25$$

$$Q_i = \int_{A_0} \begin{Bmatrix} -YZS_{XX} \\ Z^2S_{XX} \\ -ZS_{XY} \\ ZS_{XZ} \\ Y^2S_{XX} \\ YS_{XY} \\ -YS_{XZ} \\ S_{YY} \\ S_{ZZ} \\ -S_{YZ} \end{Bmatrix} dA_0, \quad i = 1, \dots, 10 \quad 3.26$$

where, N corresponds to the axial force, T_y and T_z to the shear force in Y and Z directions respectively, M_y and M_z to the bending moments about the Y and Z-axis. Quantities Q_i depend on the initial geometry of the cross-section:

$$N = \int_{A_0} S_{XX} dA = N^0 + \left\{ C_{11} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right] + \frac{1}{4} C_{12} (\theta_Y^2 + \theta_Z^2) \right\} A_0 + \frac{1}{2} C_{11} I_0 (\theta_{Y,Z}^2 + \theta_{Z,X}^2) \quad 3.27$$

$$T_y = \int_{A_0} S_{XY} dA = \frac{1}{2} k_y A_0 C_{66} [v_{,X} - \theta_Z (1 + u_{,X})] \quad 3.28$$

$$T_z = \int_{A_0} S_{XZ} dA = \frac{1}{2} k_z A_0 C_{66} [w_{,X} - \theta_Y (1 + u_{,X})] \quad 3.29$$

$$M_y = \int_{A_0} ZS_{XX} dA = (1 + u_{,X}) C_{11} \theta_{Y,X} I_0 \quad 3.30$$

$$M_z = - \int_{A_0} YS_{XX} dA = (1 + u_{,X}) C_{11} \theta_{Z,X} I_0 \quad 3.31$$

and

$$Q_1 = - \int_{A_0} YZS_{XX} dA = \frac{1}{4} I_0 (C_{11} R_0^2 \theta_{Z,X} \theta_{Y,X} - C_{12} \theta_Z \theta_Y) \quad 3.32$$

$$Q_2 = \int_{A_0} Z^2 S_{XX} dA = \left\{ \frac{N^0}{A_0} + C_{11} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right] \right\} \quad 3.33$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} R_0^2 (3\theta_{Y,X}^2 + \theta_{Z,X}^2) \Big] + \frac{1}{8} C_{12} (3\theta_Z^2 + \theta_Y^2) \Big\} I_0 \\
Q_3 = - \int_{A_0} Z S_{XY} dA &= \frac{1}{4} C_{66} I_0 (3\theta_Z \theta_{Y,X} - \theta_Y \theta_{Z,X}) \tag{3.34}
\end{aligned}$$

$$Q_4 = \int_{A_0} Z S_{XZ} dA = \frac{1}{4} C_{66} I_0 (\theta_Y \theta_{Y,X} - \theta_Z \theta_{Z,X}) \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}
Q_5 = \int_{A_0} Y^2 S_{XX} dA &= \left\{ \frac{N^0}{A_0} + C_{11} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} R_0^2 (\theta_{Y,X}^2 + 3\theta_{Z,X}^2) \right\} + \frac{1}{8} C_{12} (\theta_Z^2 + 3\theta_Y^2) \Big\} I_0 \tag{3.36}
\end{aligned}$$

$$Q_6 = \int_{A_0} Y S_{XY} dA = \frac{1}{4} C_{66} I_0 (\theta_Z \theta_{Z,X} - \theta_Y \theta_{Y,X}) \tag{3.37}$$

$$Q_7 = - \int_{A_0} Y S_{XZ} dA = \frac{1}{4} C_{66} I_0 (3\theta_{Z,X} \theta_Y - \theta_Z \theta_{Y,X}) \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned}
Q_8 = \int_{A_0} S_{YY} dA &= N^0 + \frac{1}{2} A_0 \left\{ C_{12} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} C_{22} (3\theta_Z^2 + \theta_Y^2) \right\} + \frac{1}{8} C_{12} I_0 (3\theta_{Y,X}^2 + \theta_{Z,X}^2) \tag{3.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_9 = \int_{A_0} S_{ZZ} dA &= N^0 + \frac{1}{2} A_0 \left\{ C_{12} \left[u_{,X} + \frac{1}{2} (u_{,X}^2 + v_{,X}^2 + w_{,X}^2) \right] \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} C_{22} (3\theta_Y^2 + \theta_Z^2) \right\} + \frac{1}{8} C_{12} I_0 (3\theta_{Z,X}^2 + \theta_{Y,X}^2) \tag{3.40}
\end{aligned}$$

$$Q_{10} = - \int_{A_0} S_{YZ} dA = \frac{1}{8} C_{22} A_0 \theta_Y \theta_Z - \frac{1}{4} C_{12} I_0 \theta_{Y,X} \theta_{Z,X} \tag{3.41}$$

Then the internal virtual work may be written as:

$$- \delta W_{\text{int}} = \int_0^{l_0} \begin{Bmatrix} A_1(X) \\ B_1(X) \\ C_1(X) \\ D_1(X) \\ E_1(X) \\ F_1(X) \\ H_1(X) \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} \delta u_{,X} \\ \delta v_{,X} \\ \delta w_{,X} \\ \delta \theta_{,Y} \\ \delta \theta_{Y,X} \\ \delta \theta_Z \\ \delta \theta_{Z,X} \end{Bmatrix} dX \tag{3.42}$$

With the terms $A_1(X)$, $B_1(X)$, $C_1(X)$, $D_1(X)$, $E_1(X)$, $F_1(X)$ and $H_1(X)$:

$$A_1(X) = \begin{Bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \\ -T_y \\ T_z \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} 1+u_{,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_Z \\ \theta_Y \end{Bmatrix} \quad 3.43$$

$$B_1(X) = \begin{Bmatrix} N \\ T_y \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} v_{,X} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad 3.44$$

$$C_1(X) = \begin{Bmatrix} N \\ T_z \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} w_{,X} \\ 1 \end{Bmatrix} \quad 3.45$$

$$D_1(X) = \begin{Bmatrix} T_z \\ Q_4 \\ Q_7 \\ Q_9 \\ Q_{10} \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} 1+u_{,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix} \quad 3.46$$

$$E_1(X) = \begin{Bmatrix} M_y \\ Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} 1+u_{,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_Z \\ \theta_Y \end{Bmatrix} \quad 3.47$$

$$F_1(X) = \begin{Bmatrix} -T_y \\ Q_3 \\ Q_6 \\ Q_8 \\ Q_{10} \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} 1+u_{,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_Z \\ \theta_Y \end{Bmatrix} \quad 3.48$$

$$H_1(X) = \begin{Bmatrix} M_z \\ Q_5 \\ Q_1 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{Bmatrix}^T \times \begin{Bmatrix} 1+u_{,X} \\ \theta_{Z,X} \\ \theta_{Y,X} \\ \theta_Z \\ \theta_Y \end{Bmatrix} \quad 3.49$$

The external virtual work δW_{ext} is due to the dead loads and to the pressure load.

The dead loads, which may include concentrated loads and moments as well as distributed loads, act like the body forces. The inflation pressure plays a role of a traction force acting on the cylindrical surface and on both ends. The first term on the right side of **Eq. 3.19** can be rewritten as

$$\begin{aligned}
\delta W_{ext}^d &= \int_0^{l_0} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{Bmatrix} dX \\
&+ \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} F_X(X_i) \\ F_Y(X_i) \\ F_Z(X_i) \\ M_Y(X_i) \\ M_Z(X_i) \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta u(X_i) \\ \delta v(X_i) \\ \delta w(X_i) \\ \delta \theta_Y(X_i) \\ \delta \theta_Z(X_i) \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

In which f_x , f_y and f_z are respectively the distributed loads along the X, Y, and Z axes, while $F_a(b)$, and $M_a(b)$ (With $a = X, Y, Z; b = X_1, \dots, X_n$) are the external support reactions and the external loads and moments.

The second term on the right side of **Eq. 3.19** is the external virtual work due to the inflation pressure. This virtual work includes the pressure virtual work on the cylindrical surface δW_{cyl}^p and on both ends δW_{end}^p , **Figure 3.3** shows a reference cylindrical inflating beam with an applied uniform pressure p acting on the cylindrical surface A which has a pointwise normal \underline{n} in the current configuration. The traction force vector \underline{t} in **Eq. 3.19** is therefore $p\underline{n}$ and the virtual work due to the inflation pressure δW_{ext}^p is then given by

$$\delta W_{ext}^p = \delta W_{cyl}^p + \delta W_{end}^p = \int_A p \underline{n} \cdot \delta \underline{u} dA \tag{3.51}$$

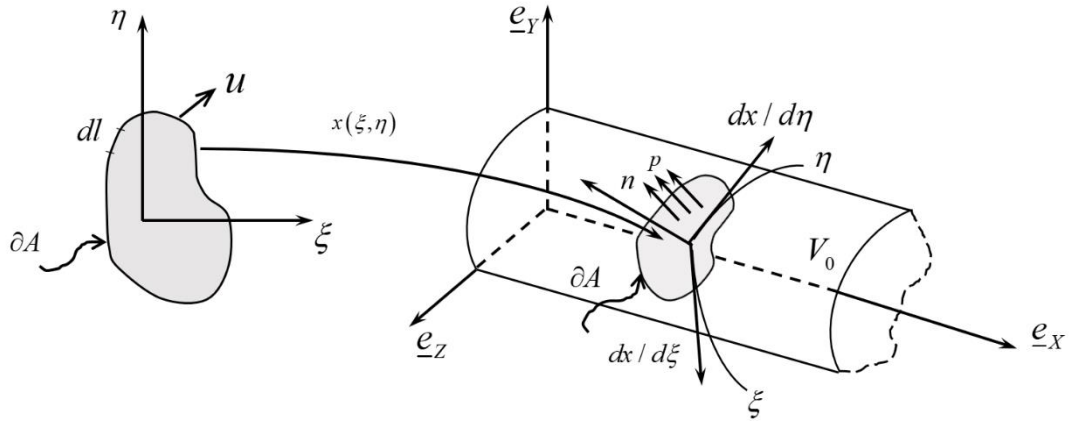


Figure 3.3 Uniform pressure on the cylindrical surface (Nguyen)

To determine the pressure virtual work δW_{cyl}^p , the curvilinear coordinates (ξ, η) are used **Figure 3.4**:

$$\begin{cases} \xi = R_o \alpha \\ \eta = X \end{cases} \tag{3.52}$$

where α is the polar angle between the normal \underline{n} at a current position \underline{x} and the \underline{e}_y . The coordinates of a material point M_o are given by

$$\underline{OM}_o = \underline{\mathbf{X}} = \begin{cases} X \\ R_o \cos \alpha \\ R_o \sin \alpha \end{cases} \quad 3.53$$

The position vector at the current configuration is then given by

$$\underline{\mathbf{OM}} = \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{U}} = \begin{cases} X + u(X) - R_o \theta_z \cos \alpha + R_o \theta_y \sin \alpha \\ v(X) + R_o \cos \alpha \\ w(X) + R_o \sin \alpha \end{cases} \quad 3.54$$

By using an arbitrary parameterization of the surface as shown in **Figure 3.3**, the

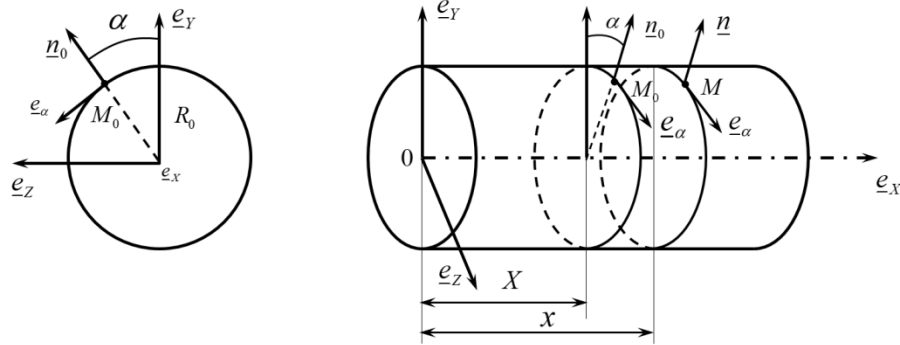


Figure 3.4 Definition of the curvilinear coordinate system

normal and area elements can be obtained in terms of the tangent vectors $\frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \xi}$ and

$\frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \eta}$ as

$$\underline{\mathbf{n}} = \frac{\frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \eta}}{\left\| \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \eta} \right\|} = \frac{\frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{R_o \partial \alpha} \times \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X}}{\left\| \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{R_o \partial \alpha} \times \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X} \right\|}; \quad 3.55$$

and

$$\begin{aligned} dA &= \left\| \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \eta} \right\| d\xi d\eta \\ &= \left\| \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{R_o \partial \alpha} \times \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial X} \right\| R_o d\alpha dX \end{aligned} \quad 3.56$$

Then δW_{cyl}^p is:

$$\delta W_{cyl}^p = \int_A p \cdot \delta \underline{\mathbf{u}} \left(\frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \underline{\mathbf{x}}}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad 3.57$$

$$= F_p \int_0^{l_o} \begin{bmatrix} -\theta_{z,x} & \theta_{y,x} & -w_{,x} & v_{,x} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \delta v \\ \delta w \\ \delta \theta_y \\ \delta \theta_z \end{Bmatrix} dX \quad 3.58$$

The pressure virtual work at the ends of the beam can be determined in the same way: the reference circular end surfaces ($X = 0$ and $X = l_o$) can be represented by the curvilinear coordinates $(\xi, \eta) = (r, r\alpha)$ **Figure 3.5**. Then,

$$\delta W_{end}^p = \int_A p \underline{n} \cdot \delta \underline{u}(l_o) dA - \int_A p \underline{n} \cdot \delta \underline{u}(0) dA \quad 3.59$$

$$= \left[\begin{matrix} 1 & \theta_Z(X_o) & -\theta_Y(X_o) \end{matrix} \right] \times \left\{ \begin{matrix} \delta u(X_o) \\ \delta v(X_o) \\ \delta w(X_o) \end{matrix} \right\} \Big|_0^{l_o} \quad 3.60$$

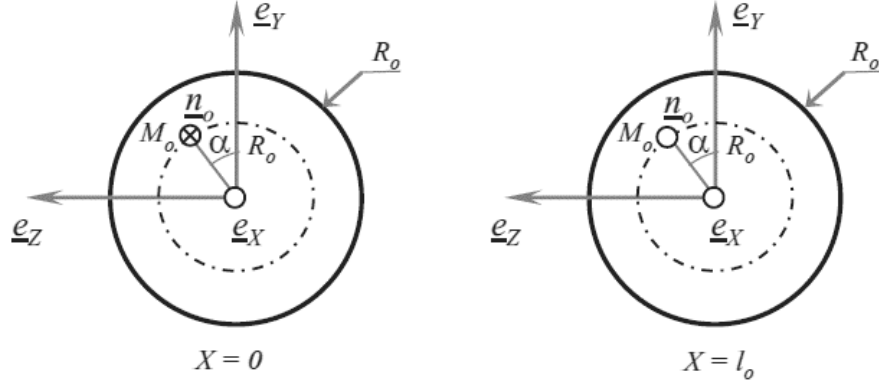


Figure 3.5 Definition of the curvilinear basis at the beam ends.

From **Eq. 3.57** and **Eq. 3.59** δW_{ext}^p is given by

$$\delta W_{ext}^p = F_p \int_0^{l_o} \left[-\theta_{Z,X} \quad \theta_{Y,X} \quad -w_{,X} \quad v_{,X} \right] \times \left\{ \begin{matrix} \delta v \\ \delta w \\ \delta \theta_Y \\ \delta \theta_Z \end{matrix} \right\} dX \quad 3.61$$

$$+ \left[\begin{matrix} 1 & \theta_Z(X_o) & -\theta_Y(X_o) \end{matrix} \right] \times \left\{ \begin{matrix} \delta u(X_o) \\ \delta v(X_o) \\ \delta w(X_o) \end{matrix} \right\} \Big|_0^{l_o}$$

where $F_p = p \Pi R_o^2$ is the pressure force due to the inflation pressure.

One can note that, according to **Eq. 3.61**, the follower force effect of the external load due to the inflation pressure depends on the displacements and the rotations.

CHAPTER 4: IGA-BASED BUCKLING ANALYSIS OF INFLATING COMPOSITE BEAMS

4.1 Introduction

Recently, there are only a few works regarding to stability of inflating structures, and there is no work using the advanced numerical method, such as IGA, to investigate the buckling behavior of inflating composite beams. Therefore, this study has devoted linear and nonlinear buckling analysis of inflating beams where isogeometric analysis used to make orthotropic technical textiles...

4.2 IGA-based formulations for the buckling problems of inflating composite beams

4.2.1 Linear eigen buckling

In linear buckling analysis situation, the beam is subjected to the inflatedly prestressing pressure $\underline{\underline{\mathbf{S}}}^0$ tensor. The very first step is to load the inflating beam by arbitrary reference level of external load, $\{\mathbf{F}_{\text{ref}}\}$ and to perform a standard linear analysis to determine the finite elementing stresses on the beam. It is also desired to have a general formula for finite elementing stress stiffness matrix $[\mathbf{k}_\sigma]$ and finite elementing elastic stiffness matrix $[\mathbf{k}]$. The strain energy of beam per volume unit is $\frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{S}}}^T\underline{\underline{\mathbf{E}}}$. As discuss in the previous chapter, the governing equations are derived based on the principle of virtual work. By integrating through the volume of the beam with respect to cross-sectional area A_o and the length l_o , an expression for the virtual strain energy of a finite inflating beam is:

$$\delta U_e = \int_{V_o} \left\{ (\underline{\underline{\mathbf{S}}}^0)^T \delta \underline{\underline{\mathbf{E}}} + \underline{\underline{\mathbf{E}}}^T \cdot \underline{\underline{\mathbf{C}}} \cdot \delta \underline{\underline{\mathbf{E}}} \right\} dV_o = \delta U_m + \delta U_b \quad 4.1$$

where U_m and U_b is membrane changing energy and the strain bending energy, sequently.

The strain energy component δU_m of the beam is associated with the stress stiffness matrix $[\mathbf{k}_\sigma]$ and δU_b relates to the conventional elastic stiffness $[\mathbf{k}]$ of the beam, as

$$\delta U_m = [\delta \mathbf{d}^T][\mathbf{k}_\sigma][\mathbf{d}] \quad 4.2$$

$$\delta U_b = [\delta \mathbf{d}^T][\mathbf{k}][\mathbf{d}] \quad 4.3$$

By applying the discretization procedure, the global equation is obtained as follows

$$\delta U_e = \{\delta \mathbf{d}\}^T \left([\mathbf{k}] + \lambda [\mathbf{k}_{\text{ref}}] \right) \{\mathbf{d}\} \quad 4.4$$

where λ is the proportionality coefficient such as $F = \lambda F_{\text{ref}}$, with F is the axial load.

The structural equilibrium equations can be obtained by applying the principle of minimum potential energy. This is expressed in in the form of eigenvalue problem:

$$\left([\mathbf{K}] + \lambda_i [\mathbf{K}_{\text{ref}}] \right) \{\delta \mathbf{D}\} = 0 \quad 4.5$$

4.2.2 Nonlinear buckling

The total Lagrangian approach is adopted in which displacements refer to the initial configuration, for the description of geometric nonlinearity. Accordingly, we can display a tangent stiffness matrix $[\mathbf{K}_T]$, which includes the effect of changing geometry as well as the effect of inflated pressure. The axial load at i^{th} is signified in following formula:

$$\{\mathbf{f}_i\} = \{\mathbf{f}_{i-1}\} + i \{\Delta \mathbf{f}\} \quad 4.6$$

With a known element, the nonlinear equilibrium equation is able to be formulated as

$$[\mathbf{k}_T] \{\Delta \mathbf{d}\} = \{\mathbf{f}_i\} \quad 4.7$$

where $[\mathbf{k}_T]$ is symbol of element tangent stiffness matrix, $\{\mathbf{f}_i\}$ and $\{\Delta \mathbf{d}\}$ are typically the external load increments vector of an element and an unknown displacement increment needs to be solved. After all the elements are assembling in the model, the below equilibrium equation is shown:

$$[\mathbf{K}_T]\{\Delta\mathbf{D}\} = \{\mathbf{F}_i\} \quad 4.8$$

Eq. 4.8 can be interpreted by an incremental scheme that based on the straightforward Newton method by using nodal load increments $\{\Delta\mathbf{F}\}$, with load correction terms and updates of $[\mathbf{K}_T]$ after each incremental step. Here, the model displacement vector $\{\mathbf{D}\}_i = \{\mathbf{D}\}_{i-1} + \{\Delta\mathbf{D}\}$, where $\{\Delta\mathbf{D}\}$ is the unknown node displacement increment at increment step i and $\{\mathbf{D}\}_{i-1}$ is node-beam displacement vector from the previous solution step. The equilibrium solution tolerance was taken as

$$\|\{\Delta\mathbf{D}\}_i\| = \left(\{\Delta\mathbf{D}\}_i^T \{\Delta\mathbf{D}\}_i \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0.0001 \quad 4.9$$

or

$$\|\{\mathbf{R}\}_i\| = \left(\{\mathbf{R}\}_i^T \{\mathbf{R}\}_i \right)^{\frac{1}{2}} \leq 0.0001 \quad 4.10$$

with $\{\mathbf{R}\}_i = \{\mathbf{R}(\mathbf{D}_{i-1})\} = [\mathbf{K}_T]\{\Delta\mathbf{D}_i\}$ being the globally unbalanced residual force vector from the previous increment. As a limit point is approached, displacement increments $\{\Delta\mathbf{D}\}$ become very large. Either at a limited point or bifurcation point, $[\mathbf{K}_T]$ becomes singular.

The outline of the algorithm at element level (numerical integration procedure for calculating the element stiffness matrix at the j th element) is describe as follows:

Require: Nodal unknown displacements $\{\Delta\mathbf{D}_i\}$, element number j th, model description.

Ensure: Element stiffness matrix $[\mathbf{K}_T^e]$, element load vectors $\{\mathbf{F}_{int}^e\}$ and $\{\mathbf{F}_{ext}^e\}$.

Loop on 1D Gauss integration m point(s) in the ζ direction:

for $m = 1$ to 3 **do**

Set sampling point location $\zeta = \zeta_m$ and associated weight factor W_m ,

Call shape function subroutine to calculate element matrix $[\mathbf{B}]$ and Jacobian operator

J , all at point ζ_m .

Calculate product $[\mathbf{B}]^T ([\Psi_{int}] - [\Psi_{ext}]) [\mathbf{B}] \cdot W_m$ and add it to array $[\mathbf{K}_T^e]$

Calculate element internal load factor and $\{T_{int}^e\} \cdot W_k$ add it to $\{\mathbf{F}_{int}^e\}$

Calculate element external load factor $(\{T_{ext}^d\} + \{T_{ext}^p\}) \cdot W_k$ and add it to array $\{\mathbf{F}_{ext}^e\}$.

end for

4.3 Numerical examples

In this section, some numerical examples are carried out and the results are presented. The slenderness ratio is $\lambda_s = L / \rho$ where $L = \mu l_o$ is the beam effective length.

4.3.1 Linear buckling analysis

The material, geometric parameters and pressure values used in this example are given in **Table 4.1**.

Natural thickness, t_ϕ (m)	125 × 10 ⁻⁶
Correction shear coefficient, k_y	0.5
Boundary condition	Simply-supported Fixed-free

Natural radius, R_ϕ (m)	0.08	0.08
Natural length, l_ϕ (m)	1.15	0.65
Young modulus, E (MPa)	250	250
Poisson ratio, ν	0.3	0.3
Internal pressure (kPa)	p1	10
	p2	20
	p3	30
	p4	40



Figure 4.1 Model of a simply-supported inflating beam subjected to axial compression load.

Figure 4.1 illustrates a cylindrical inflating composite beam under simply-supported constraints and subjected to axial compression load. The input parameters are presented in **Table 4.1**. Simply-supported boundary condition is assigned by,

$$u = v = 0 \text{ at } x = 0 \text{ and } v = 0 \text{ at } x = l_0$$

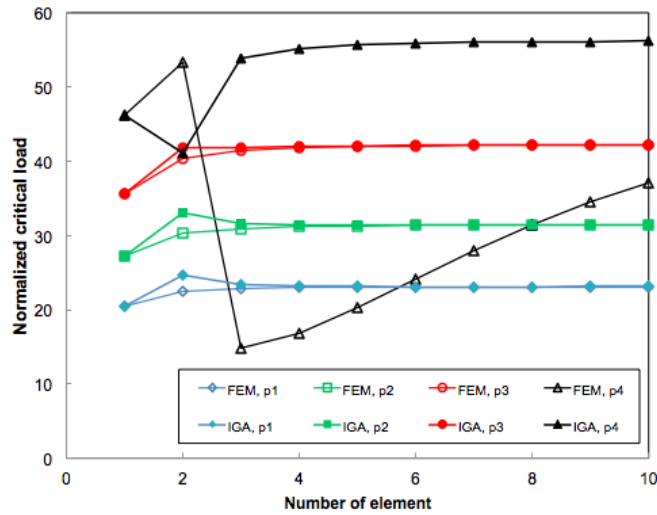


Figure 4.2 Linear eigen buckling: mesh convergence test of normalized linear buckling load coefficient ($K_c^l = 10^5 \times \sigma_{cr} / E_{eq}$) for a simply-supported LFEIB model.

Table 4.2 Normalized critical loads K_c^l of simply-supported LFEIB inflating beam

Pressure (kPa)	Closed-form [52] (1)	FEM (2)	IGA (3)	Error (%)	
				(2) & (1)	(3) & (1)
10	25.31	23.11	23.12	8.69	8.65
20	33.48	31.42	31.43	6.15	6.12
30	43.27	42.22	42.22	2.43	2.43
40	54.72	31.15	56.18	43.07	2.67

* (2) & (1) denotes the differences between FEM and closed-form solutions,

(3) & (1) denotes the differences between IGA and closed-form solution

As shown in **Figure 4.2**, the convergence studies on the normalized buckling coefficient K_c^l of LFEIB model reveal that about 4 quadratic NURBS-based Timoshenko elements are sufficient to obtain converged results. These results are in a good agreement with those derived by standard 3-node Timoshenko element used by Nguyen.

4.3.2 Nonlinear analysis

The critical load calculated in the linear buckling analysis above is appropriate only if there is little or no coupling between membrane deformation and bending. With the increase of the initial imperfections, the beam implies large displacements rather than buckling. Hence, a linear bifurcation analysis may overestimate the actual collapse load. In this problem, the nonlinear buckling of a simply supported inflating beam subjected to an axial compressive load F is investigated.

Figure 4.3 show the variation of flexion-to-radius ratio and length-to-radius ratio with increments of normalized load parameter K_c^{nl} in two cases of material. At higher pressures, the R_{fr} ratio responses are quasi-linear for low increments of K_c^{nl} . The curves become nonlinear gradually at higher K_c^{nl} .

The effects of boundary condition and material properties are clearly illustrated by the responses of simply-supported (SS) inflating beams. In case of material 1 which has low elastic modulus, the buckling of SS beam is more sensitive at high level of internal pressure. It appears mode jump behavior when the beam withstanding increasing axial compression loads. In contrary, the distortion in load-deflection does not happen in the configuration of clamped inflating beams.

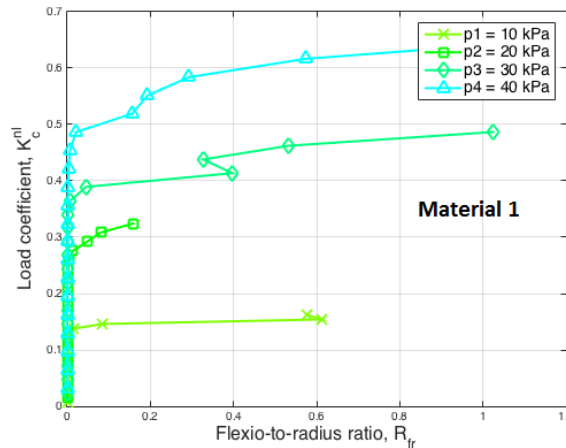


Figure 4.3 Nonlinear buckling: variation of flexion-to-radius ratio ($R_{fr} = D_v / R_o$) with increasing normalized nonlinear load parameter ($K_c^{nl} = 10^6 \times F_i / (E_{eq} A_0)$) for a simply supported NLFEIB model.

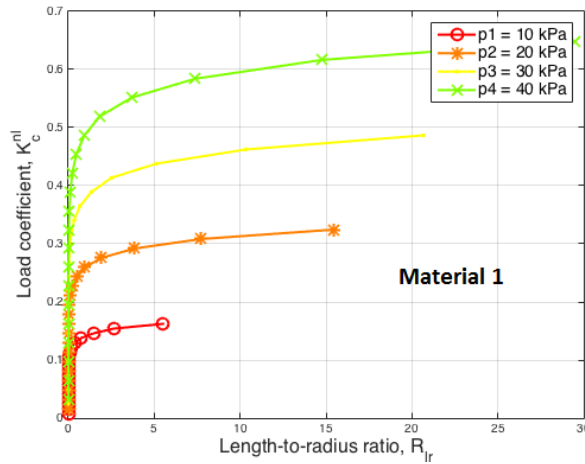


Figure 4.4 Nonlinear buckling: variation of length-to-radius ratio ($R_{lr} = D_u / R_o$) with increasing normalized nonlinear load parameter K_c^{nl} for a simply supported NLFEIB model.

CHAPTER 5: BUCKLING EXPERIMENTS OF INFLATING BEAMS

5.1 Introduction

This chapter presents methodologies of materials selection and prototyping procedure. An experimental program for buckling behavior of inflating beams fabricated from woven fabric composites is presented, in which various values of internal pressure is also considered.

5.2 Material properties and selection of fabrics

The mechanical properties of woven fabrics are examined prior to fabricating inflatable beams. The test procedure is based on ASTM-D638/Form IV.

The dog-bone shape coupon for tesile test has the geometric dimensions presented in **Figure 5.1**.

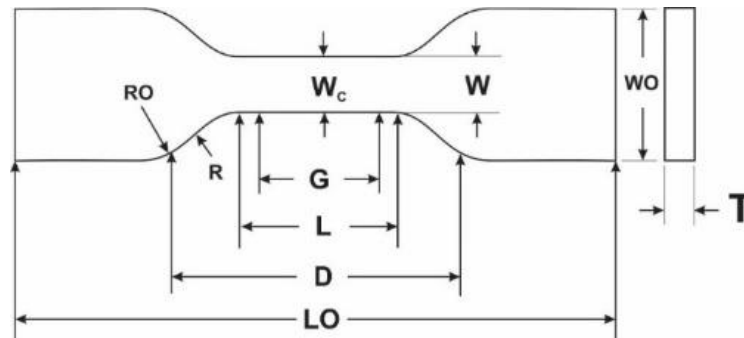


Figure 5.1 Samples after made looked like barbel

The testing procedure is following the guidance of ASTM D638 which covers the determination of the tensile properties of unreinforced and reinforced plastics in the form of standard dumbbell-shaped test specimens.

5.3 Inflatable beam specimens

The fabrication of specimens requires extra cares to avoid air leaking. Firstly, the beam body is constructed by joining the fabric along the length of the cylinder with the glued PVC 2.5 cm joint. To connect the cap of the beam to cylinder body is more complicated. The geometric dimnesions of the inflatable beam specimens with cylinder form has parameters as below:

Natural length: $L = 200\text{cm}$ (excluding 2 caps at its 2 ends)

Natural outer Radius: $R = 10\text{cm}$

Following tensile and stick experiment's data, sample 1's material (yellow fiber) was chosen for processing design of Inflatable beam samples. Structure of 2 valves of pumping and manometer at the position 20cm from beam's end. One should be located far from another (60° - 90°).

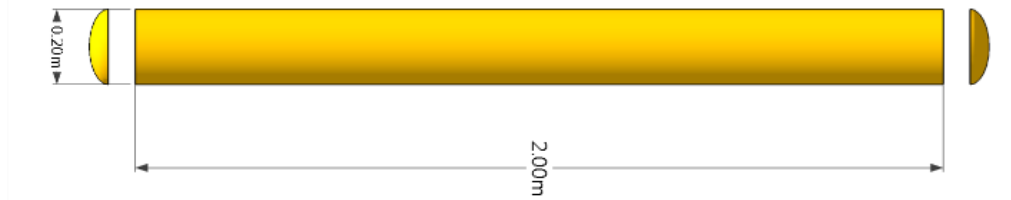


Figure 5.2 Design of inflatable beam

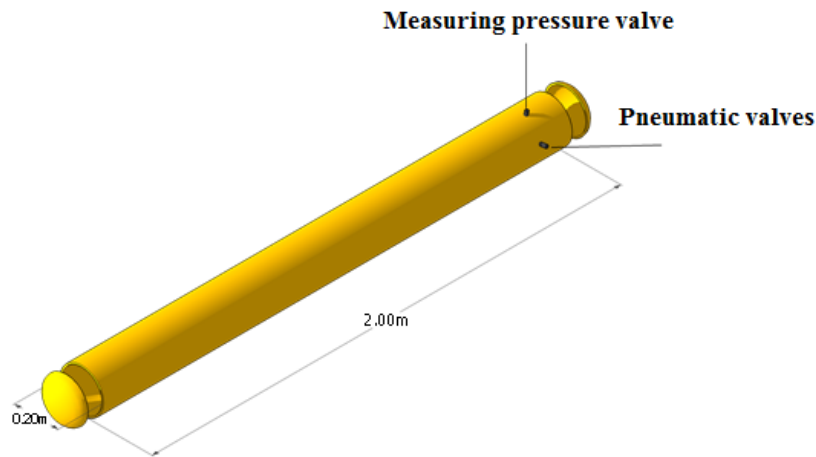


Figure 5.3 Valves of pumping and manometer

5.4 Buckling test set-up

In this study, three cylindrical inflatable beams are fabricated with the radius of $R=100\text{mm}$ and the length of $L=2\text{m}$. A compressive load F is applied incrementally at one beam end: at first, one resets the load F to zero, and then gradually increases F . To visualize the lateral deflections of the beam during its axial compression loading, a tachometer with the precision order of 1 mm was used. This sequence is repeated until the first wrinkles appear which is called the critical point.

The beam is subjected to an internal pressure p first under which the beam is in a prestressing state. An external load F is applied by a winch stacker at the end in the axial direction of the beam.

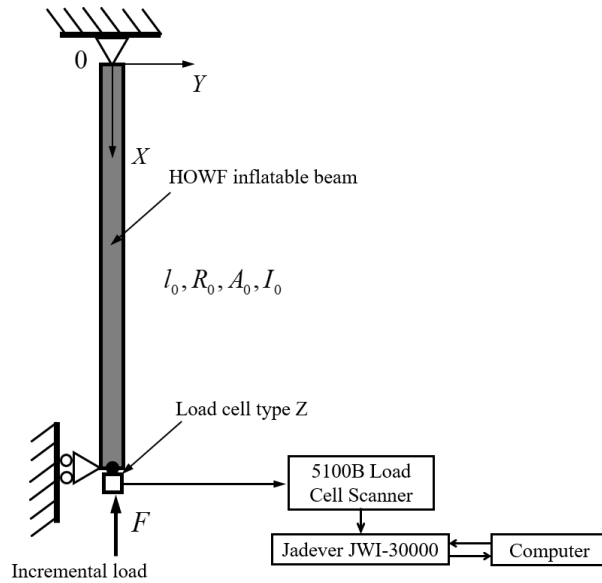


Figure 5.4 Schematic diagram of simply supported HOWF inflatable beam and instrumentation for buckling test

After setting up the measuring equipments, the beam is inflated up to a certain pressure to maintain the shape of the beam, then position the beam into the test frame. The beam is then inflated to the designed pressure. As the diameter of the beam is enlarged when increasing air pressure, the top and bottom rings need to be adjusted to fit the beam, see **Figure 5.5**.



Figure 5.5 The locator ring can be adjusted in diameter

After inflating the beam, the axial compressive load is gradually applied at the bottom end. The load value is monitored via data acquisition to control the load rate. A beam specimen will be tested with four different values of air pressure, i.e. 20 kPa, 40 kPa, 60 kPa and 80 kPa. It can be seen in the **Figure 5.6** that the wrinkle appears at the same position of the beam independent to the air pressure values.

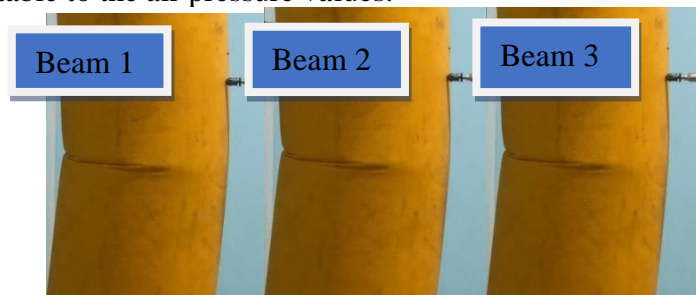


Figure 5.6 Position wrinkles begin to appear



Figure 5.7 The first wrinkles appears

The first wrinkle indicates the instability configuration of the beam and the largest deflection occurs at the wrinkle position.

5.5 Experimental results and discussion

A typical test included the following steps:

1. Loading the beam until the first wrinkles of the skin appeared. Releasing the load.
2. Loading and unloading the beam above the first buckling load several times.
3. Loading the beam until collapse.

5.5.1 Load vs displacement u relation of beam at pressure

5.5.1.1 Load vs displacement u relation of beam at pressure of 20 kPa and 80 kPa

The experimental results determine the load-displacement relation of the inflatable beams with air pressures of 20 kPa and 80 kPa shown in **Figure 5.8** and **Figure 5.9** respectively. It can be seen that the largest deviation is about 4.7% occurring as soon as the occurrence of the wrinkle. Such a small deviation indicates a good measurement method. In addition, it can be seen that the axial displacement increases linearly with the applied load, and the stiffness of the beam increases with the increase of the air pressure. The first wrinkle appears when the axial displacement being about 70mm. The first wrinkle of the beam indicates the instability of the beam, and soon enough the beam would buckle, leading to the significant decrease of load-carrying capacity of the inflatable beam. The wrinkle occurs at a similar location in the beam, e.g. at the middle section. This can be explained that the air pressure in the beam increases its load-carrying capacity, but the air pressure does not affect the buckling mode of the beam.

a) p = 20 kPa

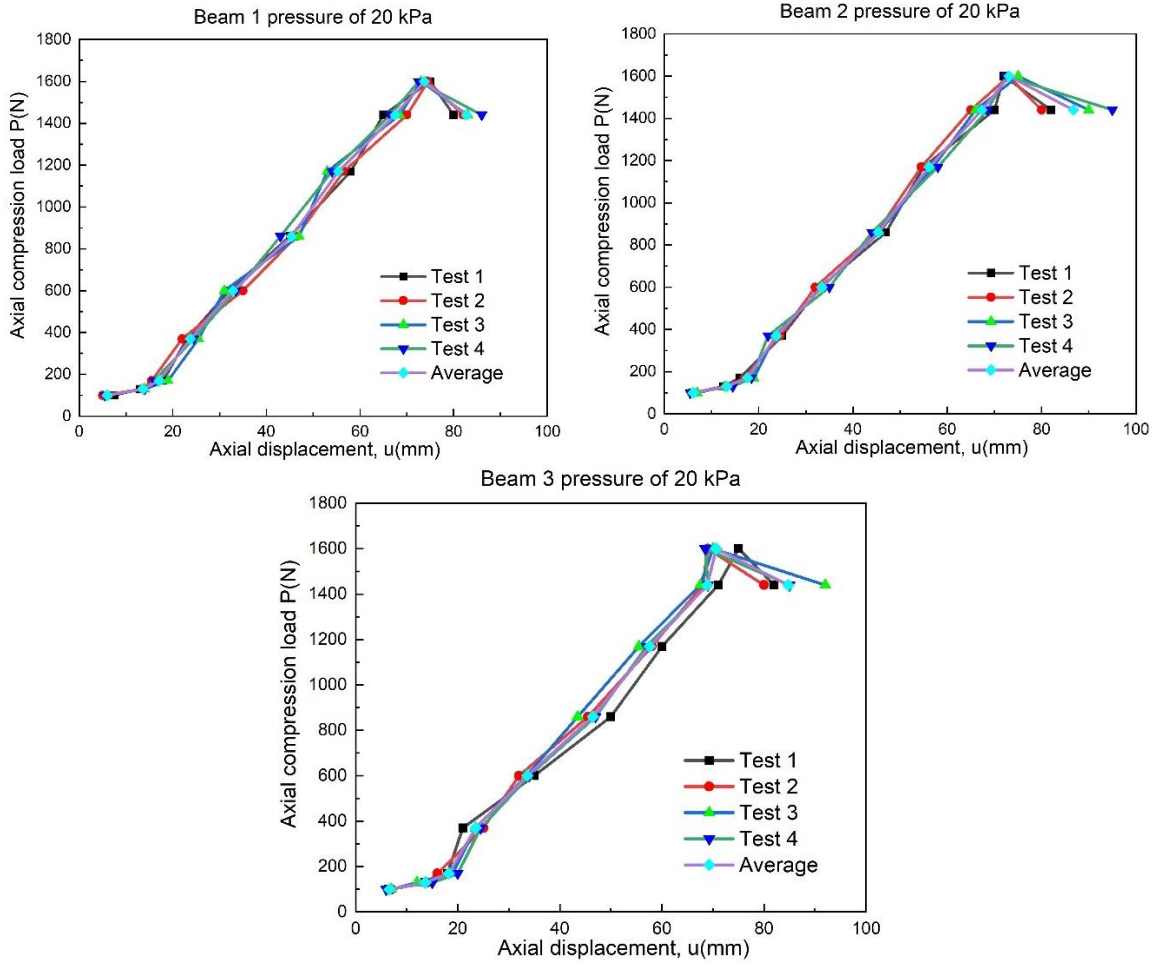
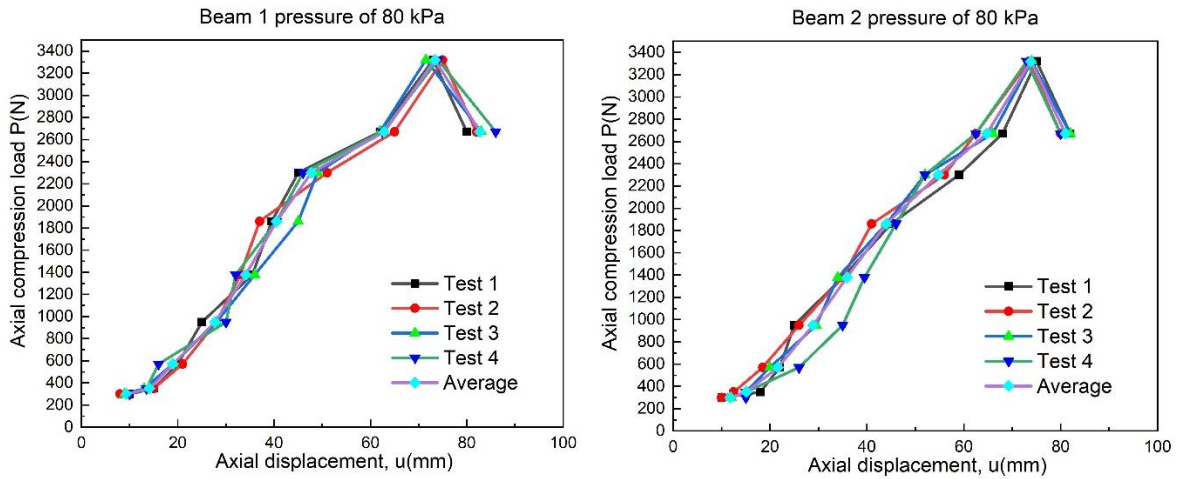


Figure 5.8 Load vs displacement relation of beam at pressure $p = 20 \text{ kPa}$
b) $p = 80 \text{ kPa}$



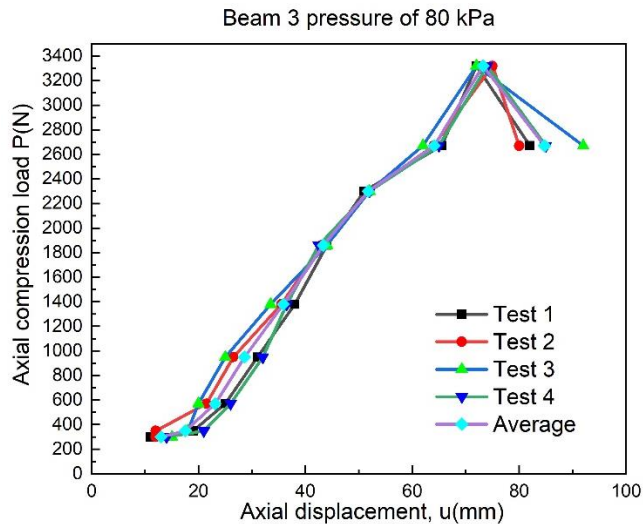


Figure 5.9 Load vs displacement relation of beam at pressure $p= 80$ kPa

5.5.1.2 Beams inflated with different air pressures

The following **Figure 5.10** shows that carrying capacity of beams depends on pressure. The pressure increases, the loading capacity typically increases.

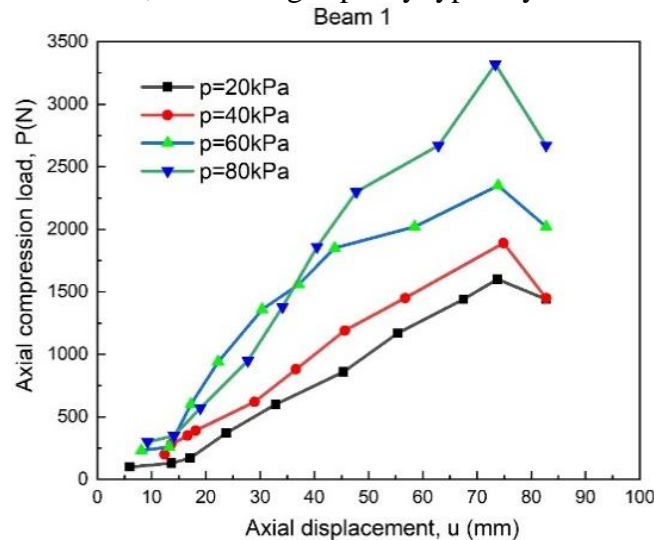


Figure 5.10 Load vs displacement relation of beam 1 at different pressures

According to the experimental results, when the axial load-carrying capacity of the beam get higher, the air-pressure magnitude particularly increases. When the air pressure reaches 80 kPa, the average load of three beams is able to withstand a maximum load of 2342 kN. The highest deviation of this critical load on the beams which compared to the average value is approximately 5.85%. This result indicates the uniformity of the specimen during the fabrication process. In summary, the beams with this result are fabricated by gluing with heat method... that give a similar result.

5.5.1.3 Comparison of 3 beams at pressure $p = 80$ kPa

The **Figure 5.11** compares the buckling behaviour of the inflatable beams with different pressure applied, which demonstrates that the air pressure largely affects the stability of the inflatable beam. The experiment also shows that the maximum load-carrying capacity is proportion to the applied pressure.

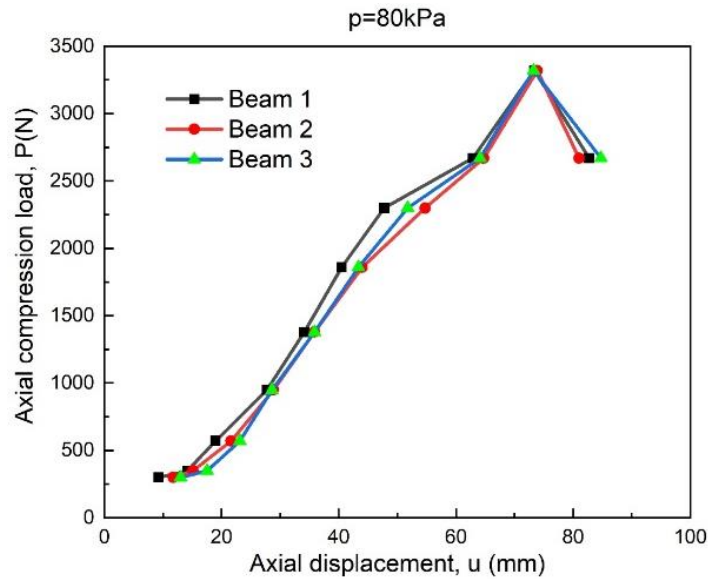


Figure 5.11 Comparison of 3 beams at pressure $p = 80 \text{ kPa}$

5.5.2 Load vs displacement v relation of beam at pressure

To evaluate the influence of relationship between the load and displacement horizontal direction, each beam was examined respectively with pressure value of 20 kPa. The experiment was performed four times. Experimental results are presented in **Figure 5.13**. These results also show that when the pressure increases, the load capacity increase simultaneously and the displacing value before cracking also increases respectively.

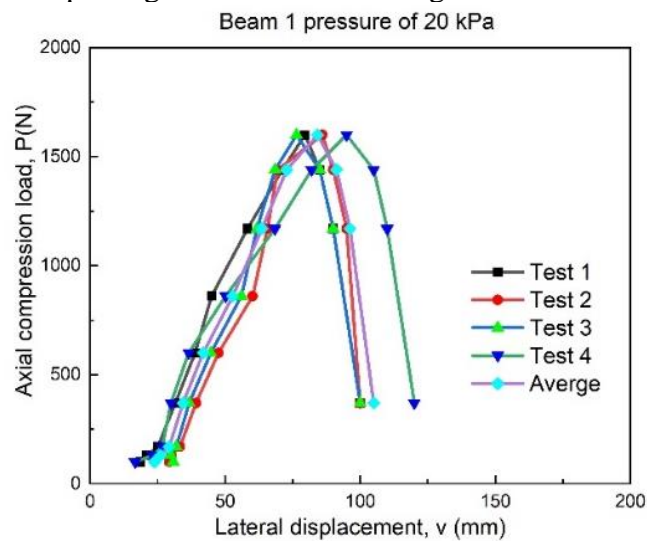


Figure 5.12 Load vs displacement relation of beam at pressure $p = 20 \text{ kPa}$

5.6 Comparison between experimental and IGA numerical methods

Figure 5.13 and **Figure 5.14** compare the experimental results and numerical results obtained from IGA. In general, it is seen that the results obtained from experiments and those from IGA are somewhat similar in the structural response of inflating beams. For the beams with low pressure, it can be seen that the experimental results and modelling results are not in good agreement. However, if the pressure in the beam increases, the prediction of IGA model becomes close to the experimental results. This phenomenon can be explained as follows:

- In the experimental process, while we inflate and conduct experiments at low pressures, the beam is not tension enough so that it can keep the beam firm at this time.
- The formation according to “ u ” changes that make the beam radius increases. The result was that we can see initial stages of experiments, the sensors often earlier receive the

results on the diagrams. However, when increasing the pump pressure in the beam, we observe that the numerical and experimental results are converged.

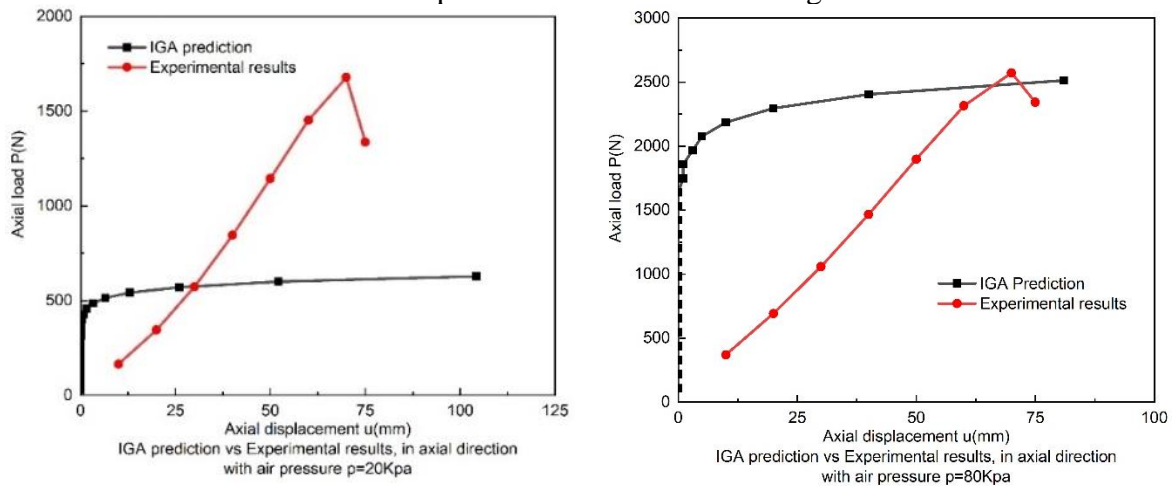


Figure 5.13 IGA prediction vs Experimental results, in axial displacement u with air pressure 20 kPa and 80 kPa

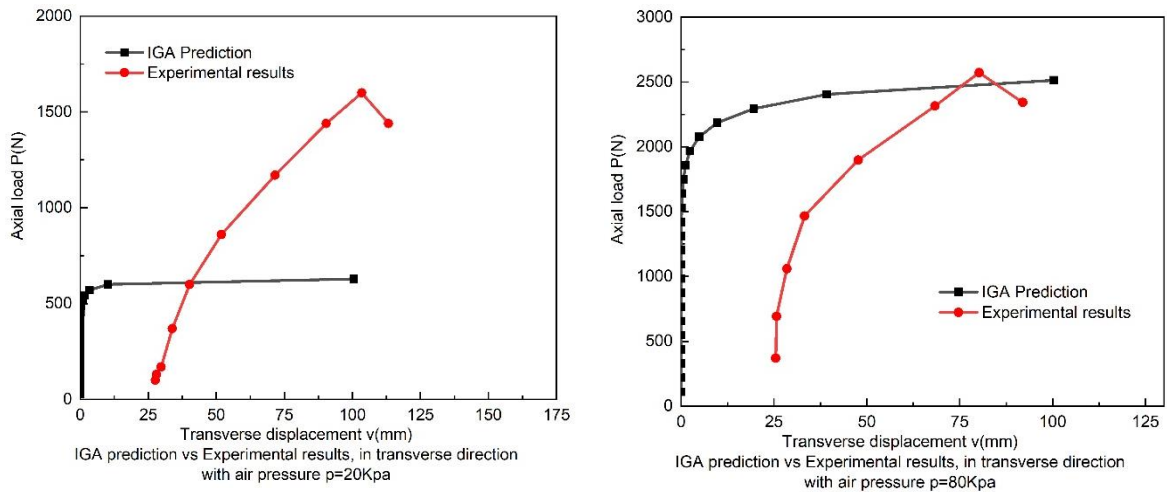


Figure 5.14 IGA prediction vs Experimental results, in transverse displacement v with air pressure 20 kPa, 40 kPa, 60 kPa and 80 kPa

The discrepancy between experimental and numerical results for low-pressure beam might be explained due to several aspects, which are summarized as follows:

- The shortage in the real material information and errors in experimental procedures might caused significant errors in the experimental results.
- The numerical simulation does not account for the failure of material, which might be the main failure reason in case of low pressure inflating beams.
- Material models used in the numerical approach might not appropriate for the use of composite fabric material, this needs further comprehensive investigations.

CONCLUSIONS

In this study, a numerical modelling technique and an experimental program are conducted to investigate the stability behaviour of inflating beam made from composite materials.

The numerical modeling is conducted based on Isogeometric Analysis approach, in which the beam models are developed based on Timoshenko's beam theory. The governing equations are derived based on total Lagrange approach, in which the membrane and bending actions are considered simultaneously. The NURBS basis functions of IGA approach are utilized to describe the governing equations and develop the global equations. Both linear and nonlinear buckling analyses are carried out. In the nonlinear buckling analysis, the well-known Newton-Raphson technique is adopted to trace the buckling curves. Validation and various parametric studies are conducted to show the reliability of the approach and study the influence of internal pressure in the beams.

In the experimental study, the material properties of fabric composite material are firstly investigated. Then, the buckling tests are carried out to study the behaviour of inflating beams with different air pressure. Experimental results are also compared with those obtained from the numerical modeling approach.

Some major conclusions drawn from this study could be summarized as follows:

- A numerical approach based on IGA was successfully developed to investigate the stability of inflating beams.
- The results obtained from IGA approach are in good agreement with those from traditional FEM. In addition, it was found out that IGA-based approach has a better convergence rate than FEM.
- From the numerical modeling and experimental results, it is seen that the stability strength of inflating beams increases with the level of the internal pressure.
- The prediction of the proposed IGA-based numerical model is more reliable in cases that pressure is high, for cases with low pressure, the prediction show a similar prediction trend with experimental results but the predicted strength is smaller than experimental results.

List of Publications

Parts of this dissertation have been published in international journals, national journals or presented in conferences. These papers are:

- **Articles in international scientific journal**

1. T. Le-Manh, Q. Huynh-Van, **Thu D. Phan**, Huan D. Phan, H. Nguyen-Xuan “Isogeometric nonlinear bending and buckling analysis of variable thickness composite plate structures”. *Composite Structures* 2017, Pages 818-826.

- **International Conference**

2. **Phan Thi Dang Thu**, Phan Dinh Huan and Nguyen Thanh Truong “Effect parametric to properties of a 2D orthogonal plain classical woven fabric composite”. *International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA), Ha Noi city 2014* - ISBN: 978-604-913-367-1, pages 509-517.

- **National Conference**

3. **Phan Thi Dang Thu**, Phan Dinh Huan and Nguyen Thanh Truong “Biaxial beam inflation test on orthotropic fabric beam”; *National Conference on Solid Mechanics, Ho Chi Minh city 2013* - ISBN: 978-604-913-213-1, pages 1169-1176.

4. Nguyen Thanh Truong, Phan Dinh Huan, **Phan Thi Dang Thu** “Discretizing an analytical inflating beam model by the shell membrane finite element”. *National Conference on Solid Mechanics, Ho Chi Minh city 2013* - ISBN: 978-604-913-213-1, pages 1221-1228.

5. **Phan Thi Dang Thu**, Le Manh Tuan, Nguyen Xuan Hung, Nguyen Thanh Truong “Geometrically nonlinear behaviour of composite beams of variable fiber volume fraction in isogeometric analysis”. *National Conference on Solid Mechanics, Da Nang city 2015* - ISBN: 978-604-82-2028-0, Pages: 1404-1409.

6. **Thu Phan-Thi-Dang**, Tuan Le-Manh, Giang Le-Hieu, Truong Nguyen-Thanh “Buckling of cylindrical inflating composite beams using isogeometric analysis”. *Proceedings of the National Conference on science and technology in mechanics IV, Ho Chi Minh City 2015, Viet Nam* - ISBN: 978-604-73-3691-3, Pages 821-826.

7. **Phan Thi Dang Thu**, Nguyen Thanh Truong, Phan Dinh Huan “Mô hình dầm hơi composite phi tuyến chịu uốn”. *National Scientific Conference on Composite Materials and Structures, Nha Trang city 2016* - ISBN: 976-604-82-2026-6, Page 699-706.

8. **Phan Thi Dang Thu**, Nguyen Thanh Truong, Phan Dinh Huan, Le Dinh Tuan “Biaxial experiments for determining material properties and joint strength of textile plain woven fabric composites”. *National Conference on Solid Mechanics, Ha Noi city 2017* - ISBN: 978-604-913-722-8, Page 1174-11.